

CHAPITRE II

CALCUL DES CONDUITES CIRCULAIRES EN CHARGE PAR LA MMR

Après avoir passé en revue les méthodes les plus significatives destinées au calcul de l'écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression, le présent chapitre propose une nouvelle approche basée sur la méthode du modèle rugueux de référence. Elle a été élaborée pour répondre aux trois problèmes principaux que pose le calcul de l'écoulement en conduite rectiligne sous pression, qui sont le calcul du débit volume Q écoulé par la conduite, le calcul du diamètre interne D de celle-ci et le calcul du gradient J de la perte de charge linéaire.

Dans un premier temps, la méthode sera exposée aussi clairement que possible en mettant l'accent sur les principaux fondements sur lesquels elle repose.

Dans un second temps, la méthode sera appliquée à la conduite circulaire en charge et les relations régissant les caractéristiques de l'écoulement seront alors déduites.

Les divers paramètres mis en jeu seront identifiés, tout en mettant en exergue leur signification physique.

Des exemples d'applications pratiques seront enfin proposés et serviront à mieux apprécier l'intérêt de la méthode préconisée.

II.1. Modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence que nous considérons est en fait une conduite circulaire, également sous pression, caractérisée par un diamètre \bar{D} , une rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$, écoulant un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité

cinématique ν , sous un gradient de la perte de charge linéaire \bar{J} .

Le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement est \bar{R} et le coefficient de frottement est \bar{f} .

On affecte à cette conduite une forte rugosité relative, arbitrairement choisie égale à $\bar{\varepsilon}/\bar{D}=3,7.10^{-2}$, de telle sorte que l'écoulement turbulent qui s'y produit soit en régime turbulent rugueux ou soit supposé être comme tel.

La rugosité relative arbitrairement choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D}=3,7.10^{-2}$ est obtenue pour diverses valeurs de la rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$ et du diamètre \bar{D} .

Puisque l'écoulement est ou est supposé être en régime turbulent rugueux, le coefficient de frottement \bar{f} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence répond donc à la relation (1.38) pour $\varepsilon/D=\bar{\varepsilon}/\bar{D}$ et $f=\bar{f}$, soit :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (2.1)$$

En introduisant dans la relation (2.1) la valeur choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D}=3,7.10^{-2}$, le coefficient de frottement \bar{f} prend alors la valeur constante :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{3,7.10^{-2}}{3,7} \right) \right]^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{16} \quad (2.2)$$

L'écoulement turbulent rugueux se produisant dans la conduite de référence est donc caractérisé par un coefficient de frottement constant égal à 1/16.

L'écoulement dans la conduite rugueuse de référence est également régi par des relations de même forme que celle des équations de base (1.33) et (1.36), exprimant respectivement le gradient de la perte de charge linéaire selon *Darcy-Weisbach* et le nombre de *Reynolds* de l'écoulement.

Appliquée à la conduite rugueuse de référence, la relation (1.33) s'écrit :

$$\bar{J} = \frac{8\bar{f}}{g\pi^2} \frac{\bar{Q}^2}{\bar{D}^5} \quad (2.3)$$

En substituant la relation (2.2) dans la relation (2.3), il vient que :

$$\bar{J} = \frac{\bar{Q}^2}{2g\pi^2 \bar{D}^5} \quad (2.4)$$

Nous pouvons déduire de la relation (2.4) que le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{D} = \left(2\pi^2\right)^{-1/5} \left(\frac{\bar{Q}^2}{g\bar{J}}\right)^{1/5} \quad (2.5)$$

La relation (2.5) traduit le fait que :

$$\bar{D} = \text{constante} \times \left(\frac{\bar{Q}^2}{g\bar{J}}\right)^{1/5} \quad (2.6)$$

où la constante est égale à $(2\pi^2)^{1/5}$.

Si la conduite rugueuse de référence écoule un débit $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de la perte de charge linéaire $\bar{J} = J$, alors, en comparant les relations (1.53) et (2.6), nous pouvons écrire que :

$$\bar{D} = \text{constante} \times D_o \quad (2.7)$$

Nous pouvons ainsi énoncer que le diamètre caractéristique D_o de *Swamee et Jain* correspond en fait, à une constante près, au diamètre de la conduite rugueuse de référence lorsque celle-ci écoule un débit volume $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de la perte de charge linéaire $\bar{J} = J$. Nous donnons ainsi la signification physique du diamètre caractéristique.

Appliquée à la conduite rugueuse de référence, la relation (1.36) s'écrit :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{\pi\bar{D}\nu} \quad (2.8)$$

En éliminant le diamètre \bar{D} entre les relations (2.5) et (2.8), nous obtenons :

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3}\right)^{1/5} \frac{\left(g\bar{J}\bar{Q}^3\right)^{1/5}}{\nu} \quad (2.9)$$

La relation (2.9) peut s'écrire :

$$\bar{R} = \text{constante} \times \frac{\left(g\bar{J}\bar{Q}^3\right)^{1/5}}{\nu} \quad (2.10)$$

avec : constante = $\left(2048/\pi^3\right)$.

En comparant les relations (1.55) et (1.58) avec la relation (2.10), il apparaît que l'inverse du paramètre cinétique ν^{*-1} de Swamee et Jain correspond bien, à une constante près, au nombre de Reynolds \bar{R} défini par la relation (2.9) lorsque $\bar{Q} = Q$ et $\bar{J} = J$.

Nous pouvons donc énoncer que l'inverse du paramètre cinétique ν^{*-1} de Swamee et Jain, correspond, à une constante près, au nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence lorsque celle-ci écoule un débit $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de la perte de charge linéaire $\bar{J} = J$.

D'autre part, en éliminant le débit \bar{Q} entre les relations (2.5) et (2.8), nous obtenons :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g\bar{J}\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.11)$$

La relation (2.11) peut s'écrire :

$$\bar{R} = \text{constante} \times \frac{\sqrt{g \bar{J} \bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.12)$$

En comparant les relations (1.70) et (2.12), nous pouvons alors énoncer que le paramètre adimensionnel N de *Hager* correspond, à une constante près, au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence lorsque celle-ci écoule un débit $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de la perte de charge linéaire $\bar{J} = J$.

En définitive, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence s'exprime selon les trois relations (2.8), (2.9) et (2.11), respectivement en fonction de (\bar{Q}, \bar{D}) , (\bar{Q}, \bar{J}) et (\bar{D}, \bar{J}) .

Le tableau 2.1 résume les caractéristiques géométriques de la conduite rugueuse de référence et hydrauliques de l'écoulement qui s'y produit.

Tableau 2.1 : Caractéristiques géométriques de la conduite rugueuse de référence et hydrauliques de l'écoulement

Paramètre	Symbole	Relation
Diamètre interne	\bar{D}	(2.5)
Rugosité absolue	ε	-
Gradient de la perte de charge linéaire	\bar{J}	(2.4)
Débit volume	\bar{Q}	-
Coefficient de frottement	\bar{f}	1/16
Nombre de <i>Reynolds</i>	\bar{R}	(2.8), (2.9), (2.11)

II.2. Calcul de l'écoulement turbulent par le modèle rugueux de référence

Dans le présent paragraphe, l'écoulement turbulent en conduite sous pression est calculé en ayant recours aux caractéristiques de l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence.

Il s'agit d'établir principalement les relations permettant de déterminer le débit volume Q écoulé par une conduite circulaire sous pression, le diamètre interne D de celle-ci ainsi que le gradient de la perte de charge linéaire J . Il s'agit donc de répondre aux trois classes de problèmes de l'écoulement turbulent. Cependant, des relations intéressantes seront également proposées pour le calcul des caractéristiques de l'écoulement telles que le nombre de *Reynolds* R et le coefficient de frottement f , lorsque l'un des trois paramètres Q , D et J n'est pas connu.

II.2.1. Le débit volume Q est inconnu

II.2.1.1. Expression du nombre de *Reynolds*

Il s'agit d'établir l'expression du nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement turbulent dans une conduite circulaire sous pression écoulant un débit volume Q inconnu. Les paramètres connus du problème sont le diamètre D de la conduite, le gradient J de la perte de charge linéaire, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Assumons les égalités suivantes : $D = \bar{D}$ et $J = \bar{J}$.

Autrement dit, nous affectons au modèle rugueux de référence le même diamètre que celui de la conduite ainsi que le même gradient de la perte de charge linéaire. La relation (2.4) devient alors :

$$J = \frac{\bar{Q}^2}{2g\pi^2 D^5} \quad (2.13)$$

En comparant les relations (1.33) et (2.13), nous pouvons conclure que $Q \neq \bar{Q}$. Le modèle rugueux de référence écoule donc un débit volume différent de celui de la conduite.

D'autre part, la relation (2.8) devient, pour $D = \bar{D}$:

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{\pi D \nu} \quad (2.14)$$

De même que la relation (2.11) s'écrit, pour $D = \bar{D}$ et $J = \bar{J}$:

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJ\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.15)$$

En comparant les relations (1.36) et (2.14), nous pouvons conclure que $R \neq \bar{R}$. Ainsi, le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement turbulent dans le modèle rugueux de référence est différent de celui de l'écoulement dans la conduite considérée.

En égalant les relations (1.33) et (2.13), nous pouvons écrire :

$$\frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} = \frac{\bar{Q}^2}{2g\pi^2 D^5}$$

soit :

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \bar{Q} \quad (2.16)$$

Désignons par ψ_Q la quantité $[1/(4\sqrt{f})]$ figurant dans la relation (2.16), soit :

$$\psi_Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \quad (2.17)$$

La combinaison des relations (2.16) et (2.17) permet d'écrire que :

$$Q = \psi_Q \bar{Q} \quad (2.18)$$

La relation (2.18) indique que le débit volume Q écoulé par une conduite circulaire sous pression est égal au débit \bar{Q} écoulé par le modèle rugueux de

référence corrigé par un facteur ψ_Q . Celui-ci peut donc être considéré comme étant le facteur de correction des débits.

D'autre part, le rapport entre les relations (1.36) et (2.14) mène à écrire que :

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{Q}{\bar{Q}}$$

Or, selon la relation (2.18), le rapport Q/\bar{Q} n'est autre que le facteur de correction des débits ψ_Q . Ainsi :

$$R = \psi_Q \bar{R} \tag{2.19}$$

La relation (2.19) traduit le fait que le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement dans une conduite circulaire sous pression est égal au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, corrigé par les effets du facteur de correction des débits ψ_Q .

En remplaçant dans la relation (1.35) de *Colebrook-White* le coefficient de frottement f ainsi que le nombre de *Reynolds* R par leur expression respective (2.17) et (2.19), il vient que :

$$\frac{1}{16\psi_Q^2} = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51 \times 4\psi_Q}{\psi_Q \bar{R}} \right) \right]^{-2}$$

d'où :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \tag{2.20}$$

Nous pouvons conclure que le facteur de correction des débits ψ_Q est fonction de la rugosité relative ε/D de la conduite et du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.

La relation (2.20) est applicable dans tous les domaines de l'écoulement

turbulent (lisse, de transition et rugueux), pour toute valeur de $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$.

Pour le domaine de l'écoulement lisse correspondant à $\varepsilon/D = 0$ ou pour celui de l'écoulement pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon/D \rightarrow 0$, la relation (2.20) s'écrit :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (2.21)$$

Par contre, pour le domaine turbulent rugueux correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou, au regard de la relation (2.15), à $\bar{R} \rightarrow \infty$, la relation (2.20) devient :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) \quad (2.22)$$

La relation (2.20) est représentée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 2.1. Le diagramme obtenu présente la même allure que celle du diagramme de la figure 1.6.

Nous pouvons clairement observer, de gauche vers la droite, sur le diagramme de la figure 2.1, les trois domaines de l'écoulement turbulent : le domaine lisse représentée par la courbe correspondant à $\varepsilon/D = 0$, le domaine de transition et le domaine turbulent rugueux correspondant à une variation quasi horizontale de $\psi_Q(\bar{R})$.

Dans le domaine lisse, le facteur de correction des débits ψ_Q augmente avec l'accroissement du nombre de Reynolds \bar{R} . Dans le domaine de transition, ψ_Q augmente également avec l'accroissement de \bar{R} , pour une valeur fixée de la rugosité relative ε/D . Par contre, ψ_Q diminue avec l'accroissement de ε/D , pour une valeur fixée du nombre de Reynolds \bar{R} .

Sur le diagramme de la figure 2.1, nous avons fait figurer la courbe limite pratique séparant les domaines de transition et turbulent rugueux. La courbe est représentée en trait continu et a été tracée en admettant que si les relations (2.20) et (2.22) donnent 1% d'écart entre les valeurs calculées de ψ_Q , alors l'écoulement peut être étudié avec suffisamment de précision dans le domaine

turbulent rugueux. Ceci peut se traduire par l'égalité suivante :

$$\psi_{Q,Rugueux} = 1,01 \times \psi_{Q,Transition} \quad (2.23)$$

Le facteur de correction $\psi_{Q,rugueux}$ figurant dans le membre gauche de la relation (2.23) est donné par la relation (2.22), tandis que $\psi_{Q,transition}$ figurant dans le membre droit de la relation (2.23) est donné par la relation (2.20). Ainsi :

$$-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) = -1,01 \times \frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right)$$

Après simplifications et réarrangements, l'égalité précédente conduit à écrire que :

$$\bar{R} = \frac{10,04}{\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{1/1,01} - \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)} \quad (2.24)$$

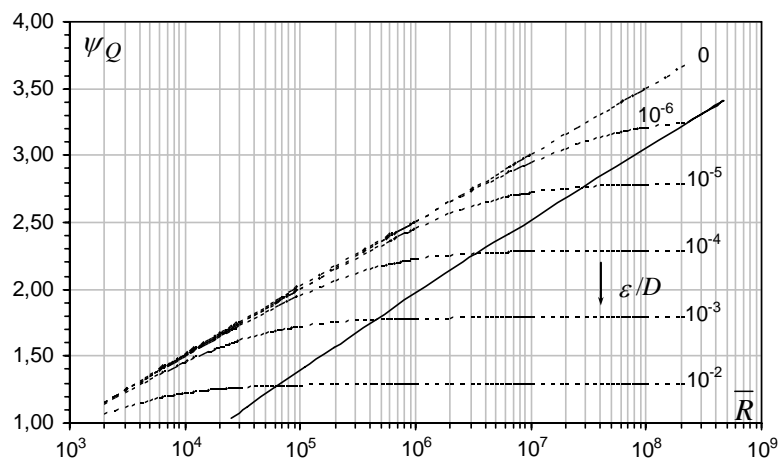


Figure 2.1 : Variation du facteur de correction des débits ψ_Q en fonction du nombre de Reynolds \bar{R} , pour diverses valeurs de ε/D .
 (—) Courbe limite pratique entre les domaines de transition et turbulent rugueux

La courbe limite pratique entre les domaines d'écoulement de transition et turbulent rugueux a alors été tracée après avoir effectué les calculs suivants :

- i. Une valeur de la rugosité relative ε/D est fixée.
- ii. Le nombre de Reynolds \bar{R} est alors calculé selon la relation (2.24).
- iii. Avec les valeurs données de ε/D et de \bar{R} , la relation (2.20) permet de calculer le facteur de correction des débits ψ_Q .

Nous avons regroupé dans le tableau 2.2 les valeurs de ψ_Q obtenues selon les étapes de calcul précédemment indiquées, pour quelques valeurs arbitrairement choisies de la rugosité relative ε/D .

Tableau 2.2 : Valeurs du facteur ψ_Q et de \bar{R} calculées selon les relations (2.24) et (2.20) respectivement, pour quelques valeurs de ε/D

ε/D	\bar{R}	ψ_Q
10^{-2}	$6,16.10^4$	1,271
10^{-3}	$4,38.10^5$	1,766
10^{-4}	$3,38.10^6$	2,261
10^{-5}	$2,74.10^7$	2,756
10^{-6}	$2,3.10^8$	3,251

Selon la relation (2.24), si le nombre de Reynolds \bar{R} est tel que :

$$\bar{R} \geq \frac{10,04}{\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)^{1/1,01} - \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)} \quad (2.25)$$

alors l'écoulement peut être étudié, avec suffisamment de précision dans le domaine turbulent rugueux. Autrement dit, si l'inégalité (2.25) est satisfaite, alors le couple de valeurs $(\varepsilon/D, \bar{R})$ sera matérialisé par un point situé sur la courbe ou à droite de la courbe limite pratique séparant les domaines de

transition et turbulent rugueux (Figure 2.1).

Pour déterminer l'expression recherchée du nombre de *Reynolds* R , il faut éliminer le facteur de correction ψ_Q entre les relations (2.19) et (2.20), soit :

$$R = -\frac{1}{2}\bar{R} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.26)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement turbulent dans une conduite circulaire sous pression, en fonction de la rugosité relative ε/D de celle-ci et du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.

La relation (2.26) est évidemment applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent correspondant à $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$.

Pour le domaine lisse ou pratiquement lisse, correspondant à $\varepsilon/D = 0$ ou à $\varepsilon/D \rightarrow 0$, la relation (2.26) s'écrit :

$$R = -\frac{1}{2}\bar{R} \log \left(\frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.27)$$

Pour le domaine turbulent rugueux, correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou à $\bar{R} \rightarrow \infty$, la relation (2.26) devient :

$$R = -\frac{1}{2}\bar{R} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \quad (2.28)$$

Nous avons représenté dans le système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques de la figure 2.2, la variation de R en fonction de \bar{R} selon la relation (2.26), pour les valeurs extrêmes $\varepsilon/D = 0$ et $\varepsilon/D = 0,05$ de la rugosité relative.

Les courbes obtenues sont donc des courbes enveloppes extrêmement plates, entre lesquelles se situent les courbes qui correspondent à l'intervalle $0 < \varepsilon/D < 0,05$.

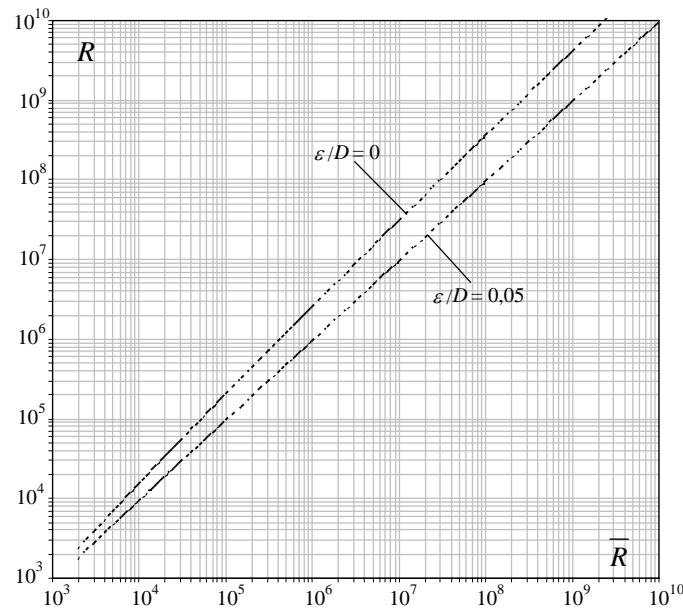


Figure 2.2. : Variation de $R(\bar{R})$ selon la relation (2.26), pour les valeurs extrêmes $\varepsilon/D = 0$ et $\varepsilon/D = 0,05$ de la rugosité relative.

Les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour calculer le nombre de *Reynolds* R , même si le débit volume Q écoulé par la conduite est inconnu. Les données du problème sont : le diamètre D de la conduite, le gradient J de la perte de charge linéaire, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

- i. A partir des valeurs connues de ε et de D , calculer la rugosité relative ε/D .
- ii. Les valeurs connues des paramètres D , J et ν permettent le calcul du nombre de *Reynolds* \bar{R} par application de la relation (2.15).
- iii. Les valeurs ainsi déterminées de ε/D et de \bar{R} mènent au calcul aisé du nombre de *Reynolds* R de l'écoulement par application de la relation (2.26).
- iv. Le couple de valeurs calculées de ε/D et de \bar{R} se matérialise, sur la figure 2.1, par un point qui permet de se prononcer sur la nature du régime de l'écoulement.

Exemple d'application 2.1.

Soit une conduite circulaire en charge de diamètre interne $D = 1$ m, caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 0,0001$ m et écoulant un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ sous un gradient de la perte de charge linéaire $J = 3.10^{-4}$.

Quelle est la nature du régime de l'écoulement ? Calculer la valeur du nombre de Reynolds R . Quelle est la valeur du facteur de correction des débits ψ_Q ? Déduire la valeur du coefficient de frottement f .

i. Avec les valeurs données de ε et D , la rugosité relative ε/D est donc :

$$\varepsilon/D = \frac{0,0001}{1} = 10^{-4}$$

ii. Les valeurs données des paramètres D , J et ν permettent le calcul aisé du nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, en application de la relation (2.15), soit :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 1^3}}{10^{-6}} \cong 3,07.10^5$$

iii. En reportant les valeurs ($\varepsilon/D = 10^{-4}$; $\bar{R} = 3,07.10^5$) sur le diagramme de la figure 2.1, nous obtenons un point situé dans le domaine de transition. L'écoulement turbulent qui se produit dans la conduite considérée est donc en régime de transition.

iv. Le nombre de Reynolds R recherché est donc, selon la relation (2.26) :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) = -\frac{1}{2} \times 3,07.10^5 \times \log \left(\frac{10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{3,07.10^5} \right)$$

$$\cong 6,48.10^5$$

v. Le facteur de correction des débits ψ_Q peut être calculé, soit par application de la relation (2.20) ou par la relation (2.19). En appliquant celle-ci, il vient que :

$$\psi_Q = \frac{R}{\bar{R}} = \frac{6,48 \cdot 10^5}{3,07 \cdot 10^5} = \frac{6,48}{3,07} = 2,1107$$

vi. Le coefficient de frottement est déduit de la relation (2.17), soit :

$$f = \frac{1}{16\psi_Q^2} = \frac{1}{16 \times 2,1107^2} = 0,014$$

Exemple d'application 2.2.

Soit une conduite circulaire en charge de diamètre interne $D=1,5m$, caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon=1,5 \cdot 10^{-4}m$ et écoulant un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu=10^{-6}m^2/s$ sous un gradient de la perte de charge linéaire $J=2,5 \cdot 10^{-2}$.

Quelle est la nature du régime de l'écoulement ? Calculer la valeur du nombre de Reynolds R . Quelle est la valeur du facteur de correction des débits ψ_Q ? Déduire la valeur du coefficient de frottement f .

i. La rugosité relative ε/D est :

$$\varepsilon/D = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{1,5} = 10^{-4}$$

ii. Selon la relation (2.15), le nombre de Reynolds \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times 1,5^3}}{1,5 \cdot 10^{-6}} \cong 4475262$$

iii. En considérant le diagramme de la figure 2.1, le couple de valeurs ($\varepsilon/D=10^{-4}; \bar{R}=4475262$) se matérialise par un point situé légèrement à droite de la courbe limite pratique entre les domaines de transition et turbulent rugueux. L'écoulement en présence peut donc être considéré, avec suffisamment de précision, comme étant en régime turbulent rugueux.

La nature rugueuse du régime de l'écoulement est par ailleurs confirmée par l'inégalité (2.25). En effet :

$$\bar{R} = 4475262 > \frac{10,04}{\left(\frac{10^{-4}}{3,7}\right)^{1/1,01} - \left(\frac{10^{-4}}{3,7}\right)} = 3384423$$

- iv. Etant donné que l'écoulement est en régime turbulent rugueux, le nombre de *Reynolds* R est donné par la relation (2.28), soit :

$$R = -\frac{1}{2}\bar{R}\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) = -\frac{1}{2} \times 4475262 \times \log\left(\frac{10^{-4}}{3,7}\right) \cong 10221950$$

La valeur exacte du nombre de *Reynolds* R peut être calculée par la relation (2.26), soit :

$$R = -\frac{1}{2}\bar{R}\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R}\right) = -\frac{1}{2} \times 4475262 \times \log\left(\frac{10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{4475262}\right) \cong 10144457$$

En optant pour la relation (2.28), le calcul de la valeur du nombre de *Reynolds* R est donc entaché d'une erreur relative égale à :

$$\frac{\Delta R}{R} = 100 \times \frac{10221950 - 10144457}{10221950} = 0,758\% \cong 0,76\%$$

- v. Le facteur de correction des débits ψ_Q est, selon la relation (2.22) :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) = -\frac{1}{2} \times \log\left(\frac{10^{-4}}{3,7}\right) = 2,2841$$

Cette valeur aurait pu être obtenue en considérant la relation (2.19), soit :

$$\psi_Q = \frac{R}{\bar{R}} = \frac{10221950}{4475262} = 2,2841$$

La valeur exacte de ψ_Q est, selon la relation (2.20) :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R} \right) = -\frac{1}{2} \times \log \left(\frac{10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{4475262} \right) \cong 2,2668$$

En optant pour la relation (2.22), le calcul du facteur ψ_Q est donc entaché d'une erreur relative égale à :

$$\frac{\Delta\psi_Q}{\psi_Q} = 100 \times \frac{2,2841 - 2,2668}{2,2841} = 0,757\% \cong 0,76\%$$

L'erreur relative sur le facteur ψ_Q est évidemment la même que celle commise sur le calcul du nombre de *Reynolds* R , puisque, selon la relation (2.19) :

$$(\Delta R)/R = (\Delta\psi_Q)/\psi_Q$$

vi. Le coefficient de frottement f est déduit de la relation (2.17), soit :

$$f = \frac{1}{16\psi_Q^2} = \frac{1}{16 \times 2,2841^2} \cong 0,01198$$

La valeur exacte de f est obtenue en insérant dans la relation (2.17) la valeur exacte du facteur de correction ψ_Q , soit :

$$f = \frac{1}{16\psi_Q^2} = \frac{1}{16 \times 2,2668^2} \cong 0,01216$$

L'erreur relative commise sur le coefficient de frottement f est donc :

$$\frac{\Delta f}{f} = 100 \times \frac{0,01216 - 0,01198}{0,01216} = 1,48\% \cong 1,5\%$$

Ce résultat était prévisible car, selon la relation (2.17), nous pouvons écrire que :

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 \frac{\Delta \psi_Q}{\psi_Q}$$

soit :

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 \times 0,76\% = 1,52\%$$

Cet exemple montre, si besoin est, que si le coefficient de frottement f est calculé en application de la relation (2.17), il est recommandé d'utiliser la valeur exacte du coefficient de correction des débits ψ_Q .

II.2.1.2. Expression du coefficient de frottement

Même si la valeur du débit volume Q n'est pas une donnée du problème, la valeur exacte du coefficient de frottement f peut être calculée, à condition que les paramètres D , J , ε et ν soient connus.

Pour établir l'expression du coefficient de frottement f , il suffit d'éliminer le facteur de correction des débits ψ_Q entre les relations (2.17) et (2.20), soit :

$$\frac{1}{4\sqrt{f}} = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right)$$

ou bien :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (2.29)$$

La relation (2.29) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, pour $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$. Le nombre de Reynolds \bar{R} est calculé selon la relation la relation (2.15) pour les valeurs connues des paramètres D , J et ν .

Exemple d'application 2.3.

Reprenons les données de l'exemple d'application 2.2 qui sont :

$$D = 1,5 \text{ m}, J = 2,5 \cdot 10^{-2}, \varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

i. La rugosité relative a déjà été calculée et vaut :

$$\varepsilon/D = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{1,5} = 10^{-4}$$

ii. De même que le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence a été évalué à :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times 1,5^3}}{1,15 \cdot 10^{-6}} \cong 4475262$$

iii. Ainsi, le coefficient de frottement f est, selon la relation (2.29) :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{4475262} \right) \right]^{-2} \\ \cong 0,01216$$

Il s'agit bien de la valeur exacte du coefficient de frottement f calculée à l'étape vi de l'exemple d'application 2.2.

II.2.1.3. Expression du débit volume

L'expression du débit volume Q écoulé par une conduite sous pression peut être déterminée après avoir éliminé le facteur de correction des débits ψ_Q des relations (2.18) et (2.20), soit :

$$Q = -\frac{\bar{Q}}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.30)$$

Dans la relation (2.30), le débit volume \bar{Q} est donné par la relation (2.13), soit :

$$\bar{Q} = \pi \sqrt{2} \sqrt{gJD^5} \quad (2.31)$$

Le débit volume \bar{Q} est donc bien défini par les seuls paramètres D et J .

Les relations (2.30) et (2.31) permettent d'écrire que :

$$Q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.32)$$

En termes adimensionnels, la relation (2.32) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.33)$$

Or, la quantité $Q/\sqrt{gJD^5}$ figurant dans la relation (2.33) est, par définition, la conductivité relative q de la conduite. Par suite, la relation (2.33) s'écrit :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.34)$$

La relation (2.34) possède la même forme que celle (1.71) de *Hager*, mais avec une meilleure définition des paramètres adimensionnels qui la composent.

L'expression du débit volume Q peut être également déduite des relations (1.36) et (2.26) après avoir éliminé le nombre de *Reynolds* R , soit :

$$\frac{4Q}{\pi D v} = -\frac{1}{2} \bar{R} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right)$$

ou bien :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.35)$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* \bar{R} figurant dans la relation (2.35) est donné par la relation (2.15), pour les valeurs connues des paramètres D , J et ν .

La relation (2.35) est la relation générale qui permet le calcul du débit volume Q dans une conduite circulaire en charge.

Elle est applicable à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, correspondant à $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$.

Pour le domaine de l'écoulement lisse ou pratiquement lisse, correspondant à $\varepsilon/D = 0$ ou à $\varepsilon/D \rightarrow 0$, la relation (2.35) s'écrit :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log \left(\frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.36)$$

Pour le domaine turbulent rugueux correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou à $\bar{R} \rightarrow \infty$, la relation (2.35) devient :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \quad (2.37)$$

Exemple d'application 2.4.

Quel est la valeur du débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2/s$ écoulé par une conduite circulaire sous pression caractérisée par un diamètre interne $D = 1,5 m$ et une rugosité absolue $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4} m$, sous un gradient de la perte de charge linéaire $J = 2 \cdot 10^{-3}$? Quelle est la nature du régime de l'écoulement ?

i. La rugosité relative ε/D est :

$$\varepsilon/D = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{1,5} = 2 \cdot 10^{-4}$$

- ii. D'autre part, le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.15) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \cdot 10^{-3} \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 1455665$$

- iii. Ainsi, le débit volume Q écoulé par la conduite est, en vertu de la relation (2.35) :

$$Q = -\frac{\pi D \nu}{8} \bar{R} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right)$$

soit :

$$Q = -\frac{\pi \times 1,5 \times 10^{-6}}{8} \times 1455665 \times \log \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{1455665} \right) \cong 3,614 \text{ m}^3/\text{s}$$

- iv. Selon l'inégalité (2.25), nous pouvons déduire que l'écoulement est en régime de transition puisque :

$$\bar{R} = 1455665 < \frac{10,04}{\left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7} \right)^{1/1,01} - \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7} \right)} = 1817921$$

De plus, le diagramme de la figure 2.1 confirme cet état de l'écoulement puisque le couple de valeurs $(\varepsilon/D = 2 \cdot 10^{-4}; \bar{R} = 1455665)$ se matérialise par un point situé dans le domaine de transition.

Exemple d'application 2.5.

Quelle est la valeur du débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2/s$ écoulé par une conduite circulaire sous pression caractérisée par un diamètre interne $D = 0,5 m$ et une rugosité absolue $\varepsilon = 5.10^{-4}$, sous un gradient de la perte de charge linéaire $J = 10^{-3}$? Quelle est la nature du régime de l'écoulement ?

i. La rugosité relative ε/D est :

$$\varepsilon/D = \frac{5.10^{-4}}{0,5} = 10^{-3}$$

ii. D'autre part, le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.15) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 0,5^3}}{10^{-6}} \cong 198091$$

iii. Ainsi, le débit volume Q écoulé par la conduite est, en vertu de la relation (2.35) :

$$Q = -\frac{\pi D \nu \bar{R}}{8} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right)$$

soit :

$$Q = -\frac{\pi \times 0,5 \times 10^{-6}}{8} \times 198091 \times \log \left(\frac{10^{-3}}{3,7} + \frac{10,04}{198091} \right) \cong 0,136 m^3/s = 136 l/s$$

iv. Selon l'inégalité (2.25), nous pouvons déduire que l'écoulement est en régime de transition puisque :

$$\bar{R} = 198091 < \frac{10,04}{\left(\frac{10^{-3}}{3,7}\right)^{1/1,01} - \left(\frac{10^{-3}}{3,7}\right)} = 438436$$

Le diagramme de la figure 2.1 confirme bien que le régime de l'écoulement appartient au domaine de transition, puisque le couple de valeurs ($\varepsilon/D = 10^{-3}$; $\bar{R} = 198091$) se matérialise par un point situé en pleine zone de transition.

- v. Si l'on avait supposé que le régime de l'écoulement était turbulent rugueux, le débit volume Q aurait donc pu être évalué en application de la relation (2.37), soit :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) = -\frac{\pi \times 0,5 \times 10^{-6}}{8} \times 198091 \times \log\left(\frac{10^{-3}}{3,7}\right)$$

$$\approx 0,1388 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Ainsi, dans l'hypothèse d'un régime d'écoulement turbulent rugueux, le calcul du débit Q serait entaché d'une erreur relative égale à seulement :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 100 \times \frac{0,1388 - 0,136}{0,1388} = 2\%$$

- vi. Par contre, si l'on avait supposé que l'écoulement était de nature lisse, le débit volume Q aurait été évalué en application de la relation (2.36), soit :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log\left(\frac{10,04}{\bar{R}}\right) = -\frac{\pi \times 0,5 \times 10^{-6}}{8} \times 198091 \times \log\left(\frac{10,04}{198091}\right)$$

$$= 0,167 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Le calcul du débit volume Q aurait donc été entaché d'une erreur relative égale à :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 100 \times \frac{0,167 - 0,136}{0,167} \cong 18,5\%$$

I.2.2. Le diamètre D est inconnu

II.2.2.1. Expression du nombre de *Reynolds*

Il s'agit d'établir la relation permettant le calcul explicite du nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement dans une conduite circulaire sous pression dont le diamètre D est le paramètre inconnu. Les données du problème sont le débit volume Q écoulé par la conduite, le gradient de la perte de charge linéaire J , la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Dans cette partie, nous assumons les égalités suivantes :

$$Q = \bar{Q}, J = \bar{J}$$

Autrement dit, nous faisons écouler dans le modèle rugueux de référence le même débit que celui de la conduite, sous le même gradient de la perte de charge linéaire. La relation (2.4) devient alors :

$$J = \frac{Q^2}{2g\pi^2 \bar{D}^5} \quad (2.38)$$

En comparant les relations (1.33) et (2.38), nous pouvons déduire que $D \neq \bar{D}$. Ainsi, pour écouler le débit Q sous le gradient de la perte de charge linéaire J , le modèle rugueux de référence doit être caractérisé par un diamètre \bar{D} différent de celui de la conduite.

Compte tenu du fait que $Q = \bar{Q}$ et $J = \bar{J}$, le diamètre \bar{D} s'exprime alors, en vertu de la relation (2.5), par :

$$\bar{D} = \left(2\pi^2\right)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \quad (2.39)$$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donc entièrement défini par les paramètres connus Q et J .

D'autre part, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le

modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.9) pour $Q = \bar{Q}$ et $J = \bar{J}$:

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3} \right)^{1/5} \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \quad (2.40)$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} est donc bien défini, puisque Q , J et ν se comptent parmi les paramètres connus du problème. En outre, la relation (2.8) devient, pour $Q = \bar{Q}$:

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (2.41)$$

En égalant les relations (1.32) et (2.38), il vient que :

$$\frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} = \frac{Q^2}{2g\pi^2 \bar{D}^5}$$

Après simplifications et réarrangements, la relation précédente permet d'écrire que :

$$D = (16f)^{1/5} \bar{D} \quad (2.42)$$

La relation peut également s'écrire :

$$D = \psi \bar{D} \quad (2.43)$$

où :

$$\psi = (16f)^{1/5} \quad (2.44)$$

La relation (2.43) traduit le fait que le diamètre D de la conduite est égal au diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence, corrigé par les effets du facteur ψ . Celui-ci peut donc être considéré comme le facteur de correction des diamètres.

En faisant le rapport entre les relations (1.36) et (2.41), nous obtenons :

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{\bar{D}}{D} \quad (2.45)$$

Or, selon la relation (2.43), le rapport \bar{D}/D constituant le membre droit de la relation (2.45) n'est autre que ψ^{-1} . Ainsi, la relation (45) s'écrit :

$$R = \psi^{-1} \bar{R} \quad (2.46)$$

En remplaçant, dans la relation (1.36) de *Colebrook-White*, le diamètre D , le coefficient de frottement f ainsi que le nombre de *Reynolds* R par leur expression respective (2.43), (2.44) et (2.46), nous obtenons :

$$\frac{\psi^5}{16} = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{2,51 \times 4}{\psi^{-1} \bar{R} \psi^{5/2}} \right) \right]^{-2}$$

Après simplifications et réarrangements, la relation précédente prend la forme suivante :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\bar{R} \psi^{3/2}} \right) = -2 \quad (2.47)$$

Nous obtenons ainsi la relation implicite $\psi(\varepsilon/\bar{D}, \bar{R})$. Rappelons que le diamètre \bar{D} est bien défini par la relation (2.39) pour les valeurs connues de Q et J , et que \bar{R} l'est aussi pour les valeurs données de Q , J et ν en vertu de la relation (2.40). La seule variable inconnue dans la relation (2.47) n'est donc que le facteur de correction des diamètres ψ . Celui-ci doit être évalué par un procédé itératif ou graphique, en raison de la forme implicite de la relation (2.47) qui le gouverne. La relation implicite (2.47) est représentée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure (2.3). Le diagramme obtenu traduit la variation du coefficient de correction des diamètres ψ en fonction du nombre de *Reynolds* \bar{R} , pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/\bar{D} .

Nous pouvons considérer le diagramme de la figure 2.3 comme une version du diagramme de *Moody*, représenté par la figure 1.2. On y distingue les trois domaines connus de l'écoulement turbulent : lisse, de transition et turbulent rugueux. Sur la figure 2.3 nous avons fait figurer, en trait continu, la courbe limite pratique délimitant les domaines de l'écoulement de transition et turbulent rugueux. Au-delà de cette courbe, le domaine de l'écoulement turbulent rugueux se traduit par une variation quasi horizontale du coefficient de correction des diamètres ψ . Celui-ci ne dépend que de la rugosité relative ε/\bar{D} .

Le domaine lisse, correspondant à $\varepsilon/\bar{D}=0$, se réduit à une courbe unique. Celle-ci se traduit, selon la relation (2.47), par :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{10,04}{\bar{R}\psi^{3/2}} \right) = -2 \quad (2.48)$$

Le domaine de l'écoulement rugueux, correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou à $\bar{R} \rightarrow \infty$, est régi, selon la relation (2.47), par l'équation :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{3,7\psi} \right) = -2 \quad (2.49)$$

Le diagramme de la figure 2.3 montre que dans l'ensemble du domaine turbulent, le facteur de correction des diamètres ψ varie dans la gamme $0,55 < \psi < 1$.

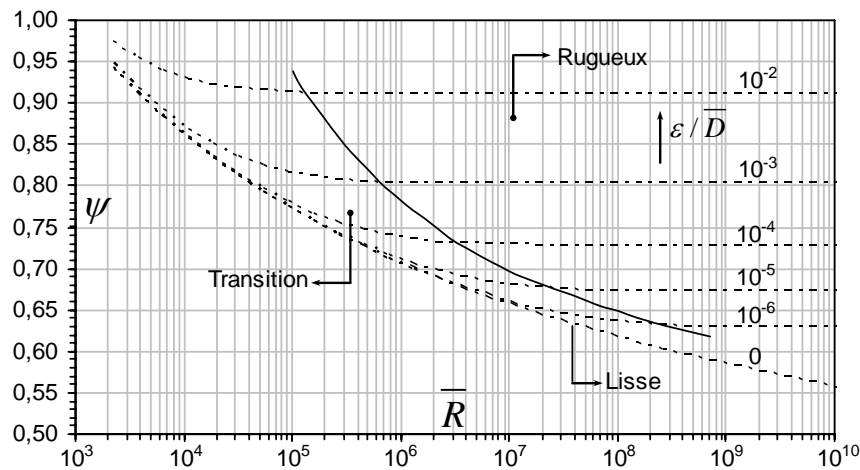


Figure 2.3 : Variation de $\psi(\bar{R})$ selon la relation (2.47) pour diverses valeurs de ε/\bar{D}

Afin de faciliter le calcul du facteur de correction ψ , il est recommandé d'utiliser la relation approchée suivante (Achour et Bedjaoui, 2006), en remplacement de la relation implicite (2.47), établie au prix d'un calcul assez laborieux :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.50)$$

Pour mieux apprécier la fiabilité de la relation approchée (2.50), nous l'avons comparée à la relation exacte (2.47). Cette comparaison a été effectuée selon les étapes suivantes :

- i. Une valeur de la rugosité relative ε/\bar{D} est choisie dans la gamme $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 2.10^{-2}$.
- ii. Le nombre de Reynolds \bar{R} est ensuite varié selon un pas arbitrairement choisi.
- iii. Pour la valeur fixée de la rugosité relative ε/\bar{D} , un calcul itératif permet d'évaluer le facteur de correction des diamètres ψ selon la relation (2.47),

pour chacune des valeurs choisies du nombre de Reynolds \bar{R} .

- iv. Pour les mêmes valeurs de ε/\bar{D} et de \bar{R} considérées au cours des étapes *i* et *ii*, la relation (2.50) permet d'obtenir la valeur approchée de ψ .
- v. L'écart relatif $(\Delta\psi)/\psi$, entre les valeurs exacte et approchée de ψ , calculées respectivement au cours des étapes *iii* et *iv*, est enfin déterminé.

A l'issue des étapes de calcul ci-dessus indiquées, l'écart relatif $(\Delta\psi)/\psi$ est représenté graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 2.4, en fonction de \bar{R} et pour chacune des valeurs fixées de la rugosité relative ε/\bar{D} .

Au regard du diagramme de la figure 2.4, il apparaît clairement que pour $\bar{R} \geq 2000$ et dans toute la gamme $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 2 \cdot 10^{-2}$, l'écart relatif maximal $[(\Delta\psi)/\psi]_{\max}$ est inférieur à 0,5%. Ceci confirme, si besoin est, la validité de la relation approchée explicite (2.50).

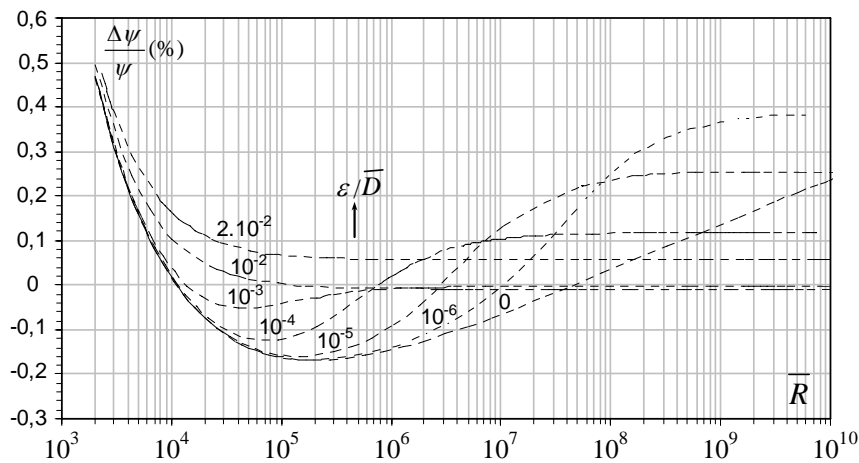


Figure 2.4 : Ecart relatif $(\Delta\psi)/\psi$ entre les valeurs exacte et approchée de ψ , calculé selon les relations (2.47) et (2.50) en fonction de \bar{R} et ε/\bar{D} .

En assumant la relation (2.50), l'expression du nombre de *Reynolds* R de l'écoulement est déduite de la relation (2.46), soit :

$$R = \frac{\bar{R}}{1,35} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.51)$$

La relation (2.51) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent. Elle engendrerait, selon la relation (2.46), une erreur relative maximale sur le calcul de R égale à seulement :

$$[(\Delta R)/R]_{\max} = [(\Delta \psi)/\psi]_{\max} = 0,5\%$$

Les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour calculer la valeur du nombre de *Reynolds* R par application de la relation (2.51), sachant que Q , J , ε et ν sont les paramètres connus du problème et que le diamètre D de la conduite n'est pas requis :

- i. A partir des valeurs connues des seuls paramètres Q et J , la relation (2.39) permet le calcul aisé du diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence, soit :

$$\bar{D} = (2\pi)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5}$$

- ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} peut être évalué soit par application de la relation (2.40) à partir des valeurs données de Q , J et ν :

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3} \right)^{1/5} \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu}$$

soit par application de la relation (2.41) en y insérant la valeur donnée du débit volume Q et la valeur calculée de \bar{D} à l'issue de l'étape i :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu}$$

- iii. La valeur donnée de la rugosité absolue ε et celle précédemment calculée de \bar{D} donnent la rugosité relative ε/\bar{D} .
- iv. Les paramètres \bar{R} et ε/\bar{D} sont alors insérés dans la relation (2.51) pour l'évaluation du nombre de *Reynolds* recherché R .

Exemple d'application 2.6.

Quelle est la valeur du nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement se produisant dans une conduite circulaire sous pression de rugosité absolue $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} m$, écoulant un débit volume $Q = 0,136 m^3/s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2/s$, sous un gradient de la perte de charge linéaire $J = 10^{-3}$? Quelle est la nature du régime de l'écoulement ?

- i. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.39) :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{0,136^2}{9,81 \times 10^{-3}} \right)^{1/5} \cong 0,6252 m$$

- ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} est, en vertu de la relation (2.41) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times 0,136}{\pi \times 0,6252 \times 10^{-6}} \cong 276970$$

Le même résultat est obtenu par application de la relation (2.40), soit :

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3} \right)^{1/5} \frac{(gJQ^3)}{\nu} = \left(2048/\pi^3 \right) \times \frac{(9,81 \times 10^{-3} \times 0,136^3)}{10^{-6}} = 276970$$

- iii. La rugosité relative ε/\bar{D} est :

$$\varepsilon/\bar{D} = 5 \cdot 10^{-4} / 0,6252 \cong 8 \cdot 10^{-4}$$

- iv. Compte tenu des valeurs ainsi calculées de \bar{R} et ε/\bar{D} , le nombre de Reynolds R recherché est, selon la relation (2.51) :

$$R = \frac{\bar{R}}{1,35} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{2/5} = \frac{276970}{1,35} \times \left[-\log \left(\frac{8 \cdot 10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{276970} \right) \right]^{2/5}$$

$$\cong 346275$$

- v. Le couple de valeurs ($\varepsilon/\bar{D} = 8 \cdot 10^{-4}$; $\bar{R} = 276970$) se matérialise, sur le diagramme de la figure 2.3, par un point situé en pleine zone de transition. L'écoulement est donc en régime de transition.
- vi. La présente étape anticipe sur le calcul du diamètre D de la conduite dont la valeur n'a pas été nécessaire à la résolution de l'exemple d'application considéré. En vertu de la relation (1.36), le diamètre D de la conduite est :

$$D = \frac{4Q}{\pi R v} = \frac{4 \times 0,136}{\pi \times 346275 \times 10^{-6}} = 0,50 \text{ m}$$

Si une précision meilleure que 0,5% est souhaitée sur le calcul du nombre de Reynolds R , il est possible de proposer une autre formulation en remplacement de la relation (2.51). Pour cela, il faut rappeler la relation (2.15) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJ\bar{D}^3}}{v} \quad (2.15)$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} de la relation (2.15) correspondant aux conditions :

$$Q \neq \bar{Q}, D = \bar{D} \text{ et } J = \bar{J}, \text{ soit } \bar{R}(Q \neq \bar{Q}; D = \bar{D}; J = \bar{J})$$

En insérant la relation (2.43) dans (2.15), il vient que :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} v^{3/2} \frac{\sqrt{gJ\bar{D}^3}}{v} \quad (2.52)$$

La relation (2.52) peut s'écrire :

$$\bar{R}(Q \neq \bar{Q}; D = \bar{D}; J = \bar{J}) = \psi^{3/2} \bar{R}(Q = \bar{Q}; D \neq \bar{D}; J = \bar{J}) \quad (2.53)$$

D'autre part, en éliminant le coefficient f entre les relations (2.17) et (2.44), nous obtenons :

$$\psi^{-1} = \psi_Q^{2/5} \quad (2.54)$$

Les relations (2.20) et (2.54) permettent d'écrire que :

$$\psi^{-1} = \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.55)$$

où \bar{R} correspond en fait à $\bar{R}(Q \neq \bar{Q}; D = \bar{D}; J = \bar{J})$ donné par la relation (2.15). En tenant compte de la relation (2.53), la relation (2.55) s'écrit également :

$$\psi^{-1} = \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.56)$$

où \bar{R} correspond en fait à $\bar{R}(Q = \bar{Q}; D \neq \bar{D}; J = \bar{J})$ que l'on peut évaluer selon les relations (2.40) ou (2.41), tel que nous l'avons montré à l'étape *ii* de l'exemple d'application 2.6. En insérant la relation (2.43) dans (2.56), celle-ci devient :

$$\psi^{-1} = \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.57)$$

Or, le membre gauche de la relation (2.57) correspond, selon la relation (2.46), au rapport R/\bar{R} . De ce fait, la relation (2.57) s'écrit sous la forme définitive suivante :

$$R = \bar{R} \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.58)$$

La relation (2.58) mène à une valeur plus précise du nombre de *Reynolds* R ,

lorsqu'on la compare à la relation (2.51). Mieux encore, la relation (2.58) a été comparée à la relation exacte (2.46), pour $\bar{R} > 2200$ et $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 0,05$. Il a été observé que l'écart maximal était négligeable, de l'ordre de 0,05%.

Exemple d'application 2.7.

Reprenons les données de l'exemple d'application (2.6), soit :

$$Q = 0,136 \text{ m}^3/\text{s} ; J = 10^{-3} \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Il s'agit d'évaluer, en l'absence de la valeur du diamètre D de la conduite, le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement qui s'y écoule.

i. Le calcul du diamètre \bar{D} , de \bar{R} et de ε/\bar{D} est le même que celui effectué au cours des étapes *i*, *ii* et *iii* de l'exemple d'application (2.6). Nous obtenons :

$$\bullet \quad \bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{0,136^2}{9,81 \times 10^{-3}} \right)^{1/5} \cong 0,6252 \text{ m}$$

$$\bullet \quad \bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times 0,136}{\pi \times 0,6252 \times 10^{-6}} \cong 276970$$

$$\bullet \quad \varepsilon/\bar{D} = 5 \cdot 10^{-4} / 0,6252 \cong 8 \cdot 10^{-4}$$

ii. Selon la relation (2.50), le facteur de correction ψ est :

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{8 \cdot 10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{276970} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0,7998 \cong 0,8 \end{aligned}$$

iii. En vertu de la relation (2.58), le nombre de *Reynolds* R recherché est donc :

$$R = 276970 \times \left[-\frac{1}{2} \times \log \left(\frac{8 \cdot 10^{-4}}{3,7 \times 0,8} + \frac{10,04}{0,8^{3/2} \times 276970} \right) \right]^{2/5} \cong 346202$$

II.2.2.2. Expression du coefficient de frottement

Il s'agit d'établir la relation permettant le calcul du coefficient de frottement f à partir des valeurs connues du débit volume Q écoulé par la conduite, du gradient de la perte de charge linéaire J , de la rugosité absolue ε et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le diamètre D de la conduite n'est pas un paramètre donné du problème.

Selon les relations les relations (2.44) et (2.46), nous pouvons écrire que :

$$R = (16f)^{-1/5} \bar{R}$$

ou bien :

$$f = \frac{1}{16} \left(\frac{R}{\bar{R}} \right)^{-5} \tag{2.59}$$

En remplaçant, dans la relation (2.59), le nombre de *Reynolds* R par l'expression (2.58), nous pouvons déduire que :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2} \tag{2.60}$$

La relation (2.60) donne, de façon explicite, la valeur pratiquement exacte du coefficient de frottement f , pour les valeurs connues de Q , J , ε et ν . Les paramètres \bar{D} , \bar{R} et ψ sont calculés suivant les mêmes étapes que celles indiquées lors de l'exemple d'application 2.7.

Exemple d'application 2.8.

Reprenons les données de l'exemple 2.7 qui sont, en l'absence du diamètre D de la conduite :

$$Q = 0,136 \text{ m}^3/\text{s}; \quad J = 10^{-3}; \quad \varepsilon = 5.10^{-4} \text{ m}; \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

i. Le calcul du diamètre \bar{D} , du nombre de Reynolds \bar{R} , de la rugosité relative ε/\bar{D} et du facteur de correction des diamètres ψ a déjà été effectué et a donné les résultats suivants :

- $\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{0,136^2}{9,81 \times 10^{-3}} \right)^{1/5} \cong 0,6252 \text{ m}$
- $\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} v} = \frac{4 \times 0,136}{\pi \times 0,6252 \times 10^{-6}} \cong 276970$
- $\varepsilon/\bar{D} = 5.10^{-4} / 0,6252 \cong 8.10^{-4}$
- $\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{8.10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{276970} \right) \right]^{-2/5}$
 $= 0,7998 \cong 0,8$

ii. Le coefficient de frottement f est, selon la relation (2.60) :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2}$$

$$= \left[-2 \times \log \left(\frac{8.10^{-4}}{3,7 \times 0,8} + \frac{10,04}{0,8^{3/2} \times 276970} \right) \right]^{-2} \cong 0,02048$$

iii. Cette étape vise à vérifier la valeur précédemment calculée du coefficient de frottement f . Pour cela, nous allons faire appel à la relation (1.33) de Darcy-Weisbach qui requiert cependant la valeur du diamètre D de la conduite.

Partant des valeurs connues de la rugosité relative ε/\bar{D} et du nombre de Reynolds \bar{R} , un procédé itératif, appliqué à la relation (2.47), a donné pour le coefficient de correction des diamètres ψ , la valeur exacte :

$$\psi = 0,80023$$

Cette valeur est quasiment égale à celle approchée que nous avons évaluée en application de la relation (2.50). Ainsi, le diamètre D de la conduite est, selon la relation (2.43) :

$$D = \psi \bar{D} = 0,80023 \times 0,6252 = 0,5003m \cong 0,5m$$

La relation (1.33) de *Darcy-Weisbach* permet d'écrire que :

$$f = \frac{\pi^2}{8} \frac{gJD^5}{Q^2} = \frac{\pi^2}{8} \frac{9,81 \times 10^{-3} \times 0,5^5}{0,136^2} = 0,020448$$

Par conséquent, en comparant la valeur approchée du coefficient de frottement f de l'étape *ii* et la valeur exacte que nous venons de calculer, l'écart relatif n'est que de

$$\frac{\Delta f}{f} = 100 \times \frac{0,02048 - 0,020448}{0,02048} = 0,156\% \cong 0,16\%$$

Exemple d'application 2.9.

Une conduite lisse circulaire sous pression écoule un débit volume $Q = 1,615m^3/s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6}m^2/s$, sous un gradient de la perte de charge linéaire $J = 10^{-4}$. Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

i. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.39) :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{1,615^2}{9,81 \times 10^{-4}} \right)^{1/5} \cong 2,666m$$

ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.41) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times 1,615}{\pi \times 2,666 \times 10^{-6}} = 771298,5$$

iii. La rugosité relative ε/\bar{D} est :

$$\varepsilon/\bar{D} = 0, \text{ car la conduite est supposée être lisse}$$

iv. La valeur approchée du facteur de correction des diamètres ψ est, selon la relation (2.50) :

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0}{4,75} + \frac{8,5}{771298,5} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0,71157 \end{aligned}$$

La valeur exacte de ψ , obtenue par un procédé itératif appliqué à la relation (2.47), est :

$$\psi = 0,71265$$

Ainsi, l'écart relatif entre les valeurs approchée et exacte de ψ n'est que de :

$$\frac{\Delta\psi}{\psi} = 100 \times \frac{0,71265 - 0,71157}{0,71265} \cong 0,15\%$$

v. La valeur recherchée du coefficient de frottement f est, selon la relation (2.60) :

$$\begin{aligned} f &= \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}R} \right) \right]^{-2} \\ &= \left[-2 \times \log \left(\frac{0}{3,7 \times 0,71157} + \frac{10,04}{0,71157^{3/2} \times 771298,5} \right) \right]^{-2} = 0,011493 \end{aligned}$$

Cette valeur de f a été calculée en utilisant la valeur approchée de ψ . La valeur exacte de f peut être obtenue par application de la relation (2.44), en y insérant la valeur exacte de ψ calculée à l'étape iv, soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,71265^5}{16} = 0,011488$$

Nous pouvons ainsi observer que l'écart relatif sur f n'est que de :

$$\frac{\Delta f}{f} = 100 \times \frac{0,011493 - 0,011488}{0,011493} \cong 0,043\%$$

II.2.2.3. Expression du diamètre

Il s'agit d'établir la relation qui permet de déterminer de manière explicite le diamètre D d'une conduite circulaire sous pression, à partir des valeurs connues du débit volume Q qu'elle écoule, de la rugosité absolue ε caractérisant l'état de sa paroi interne, du gradient J de la perte de charge linéaire et de la viscosité cinématique ν du liquide écoulé.

En fait, deux expressions de ce diamètre peuvent être proposées. La première peut être déduite de la combinaison des relations (2.43) et (2.50), après avoir éliminé le facteur de correction des diamètres ψ , soit :

$$D = 1,35\bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.61)$$

La relation (2.61) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, soit pour $R > 2300$ et pour $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 0,05$. Elle occasionne un écart relatif maximal de 0,5% sur le calcul du diamètre D , ce qui est largement satisfaisant pour la plupart des cas pratiques.

Le diamètre \bar{D} et le nombre de Reynolds \bar{R} sont respectivement donnés par les relations (2.39) et (2.41). Il est utile de rappeler que \bar{R} peut être également évalué par application de la relation (2.40).

La seconde relation, permettant d'évaluer de manière explicite le diamètre D de la conduite, peut être déduite des relations (1.33) et (2.60), après avoir éliminé le coefficient de frottement f , soit :

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (2.62)$$

La relation (2.62) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement

turbulent, soit pour $R > 2300$ et pour $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 0,05$. Elle est d'une meilleure précision que la relation (2.61), bien que celle-ci soit largement suffisante.

Exemple d'application 2.10.

Une conduite circulaire sous pression, dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3} m$, écoule un débit volume $Q = 0,55 m^3/s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2/s$, sous un gradient de la perte de charge linéaire $J = 5.10^{-4}$. Quelle est la valeur du diamètre D de la conduite ? Si celle-ci était lisse, quel serait son diamètre D ?

- i. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.39), soit :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{0,55^2}{9,81 \times 5.10^{-4}} \right)^{1/5}$$

$$\cong 1,2558892 m$$

- ii. Le nombre de Reynolds \bar{R} est, selon la relation (2.41) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times 0,55}{\pi \times 1,2558892 \times 10^{-6}} = 557598,35$$

- iii. La rugosité relative ε/\bar{D} est :

$$\varepsilon/\bar{D} = 10^{-3} / 1,2558892 = 7,9625.10^{-4}$$

- iv. Le diamètre recherché D de la conduite est alors donné par la relation (2.61) :

$$D = 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$D = 1,35 \times 1,2558892 \times \left[-\log \left(\frac{7,9625 \cdot 10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{557598,35} \right) \right]^{-2/5} = 1 \text{ m}$$

- v. Calculons, au cours de cette étape, le diamètre D de la conduite par application de la relation (2.62). Celle-ci est plus précise que la relation (2.61), mais elle nécessite la valeur du facteur de correction des diamètres ψ . Celui-ci peut être évalué par la relation (2.50), soit :

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{7,9625 \cdot 10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{557598,35} \right) \right]^{-2/5} = 0,796646 \end{aligned}$$

Ainsi, selon la relation (2.62), le diamètre D de la conduite serait égal à :

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5}$$

soit :

$$\begin{aligned} D &= (2/\pi^2)^{1/5} \times \\ &\left[-\log \left(\frac{7,9625 \cdot 10^{-4}}{3,7 \times 0,796646} + \frac{10,04}{0,796646^{3/2} \times 557598,35} \right) \right]^{-2/5} \times \\ &\left(\frac{0,55^2}{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}} \right)^{1/5} = 1 \text{ m} \end{aligned}$$

Pour l'exemple d'application considéré, les relations (2.61) et (2.62) donnent finalement le même résultat.

- vi. Si la conduite était lisse, alors nous pouvons écrire que $\varepsilon/\bar{D} = 0$, le diamètre \bar{D} et le nombre de Reynolds \bar{R} restant inchangés :

$$\bar{D} = 1,2558892m ; \bar{R} = 557598,35$$

Pour $\varepsilon/\bar{D} = 0$, la relation (2.61) devient :

$$D = 1,35\bar{D} \left[-\log\left(\frac{8,5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$D = 1,35 \times 1,2558892 \times \left[-\log\left(\frac{8,5}{557598,35}\right) \right]^{-2/5} = 0,904m$$

Si l'on souhaitait calculer une valeur plus précise du diamètre D , elle serait alors donnée par la relation (2.62) qui s'écrit pour $\varepsilon/\bar{D} = 0$:

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \left[-\log\left(\frac{10,04}{\psi^{3/2}\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5}$$

Le facteur de corrections des diamètres ψ est, selon la relation (2.50) pour $\varepsilon/\bar{D} = 0$:

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log\left(\frac{8,5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log\left(\frac{8,5}{557598,35}\right) \right]^{-2/5} = 0,71982$$

Le diamètre D de la conduite est donc :

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \times \left[-\log\left(\frac{10,04}{0,71982 \times 557598,35}\right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{0,55^2}{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}} \right)^{1/5} \\ = 0,90554m$$

vii. La valeur exacte du facteur de correction des diamètres, obtenue par un procédé itératif appliqué à la relation implicite (2.48) est :

$$\psi \cong 0,720969$$

La valeur exacte du diamètre D de la conduite est donc, en vertu de la relation (2.43) :

$$D = \psi \bar{D} = 0,720969 \times 1,2558892 = 0,905457 \text{ m}$$

On voit bien que la relation (2.62) est d'une précision remarquable, puisque l'écart relatif qu'elle occasionne sur le calcul du diamètre D n'est que de :

$$\frac{\Delta D}{D} = 100 \times \frac{0,90554 - 0,905457}{0,90554} = 0,0091\%$$

Mais, la précision obtenue par application de la relation (2.61) est aussi largement suffisante puisque l'écart relatif sur le diamètre D n'est que de :

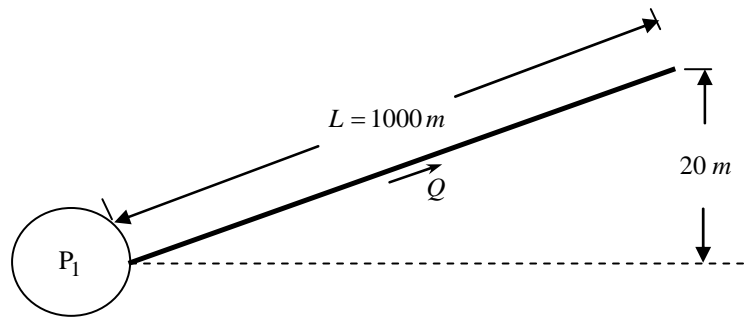
$$\frac{\Delta D}{D} = 100 \times \frac{0,905457 - 0,904}{0,905457} = 0,16\%$$

Exemple d'application 2.11.

La pression à la sortie de la station de pompage, schématisée sur la figure ci-dessous, est $P_1 = 5 \text{ bars}$. De l'eau, de masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et de débit volume $Q = 400 \text{ m}^3/\text{heure}$, doit être acheminée à travers une conduite circulaire rectiligne de diamètre interne D et de rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$, sur une longueur $L = 1000 \text{ m}$ et sur une hauteur de 20 m . L'accélération de la pesanteur est $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Parmi les diamètres commerciaux ci-dessous indiqués, quel est le plus petit diamètre D pouvant répondre aux conditions du problème ?

Diamètres commerciaux (en millimètres)
60 – 80 – 100 – 125 – 150 – 200 – 250 – 300 – 350 – 400 – 450



- i. En mètres de colonne d'eau, la pression $P_1 = 5\text{ bars}$ est environ :

$$P_1 = 50 \text{ mètres de colonne d'eau}$$

Ces vingt mètres de colonne d'eau vont servir à vaincre les vingt mètres de hauteur d'élévation ainsi que les pertes de charge linéaires Δh . Celles-ci sont donc égales à :

$$\Delta h = 50 - 20 = 30 \text{ mètres de colonne d'eau}$$

- ii. Le gradient de la perte de charge linéaire J est par suite :

$$J = \frac{\Delta h}{L} = \frac{30}{1000} = 3 \cdot 10^{-2}$$

- iii. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.39) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \left(2\pi^2\right)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} = \left(2\pi^2\right)^{-1/5} \times \left[\frac{(400/3600)^2}{10 \times 3 \cdot 10^{-2}}\right]^{1/5} \\ &= 0,29094627 \cong 0,291\text{ m} \end{aligned}$$

- iv. Le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.41) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times (400/3600)}{\pi \times 0,291 \times 10^{-6}} = 486154,847 \cong 486155$$

v. La rugosité relative ε/\bar{D} est :

$$\varepsilon/\bar{D} = \frac{10^{-4}}{0,291} \cong 3,4364 \cdot 10^{-4}$$

vi. Le diamètre D de la conduite est, en vertu de la relation (2.61) :

$$D = 1,35\bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$\begin{aligned} D &= 1,35 \times 0,291 \times \left[-\log \left(\frac{3,4364 \cdot 10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{486154,847} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0,22459053m \cong 0,2246m \end{aligned}$$

vii. Si l'on souhaitait obtenir une valeur encore plus précise du diamètre D , elle pourrait être calculée par application de la relation (2.62) :

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}R} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5}$$

Le facteur de correction des diamètres ψ est donné par la relation (2.50), soit :

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{3,4364 \cdot 10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{486155} \right) \right]^{-2/5} \cong 0,77179 \end{aligned}$$

Le diamètre D est par suite :

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \times \left[-\log \left(\frac{3,4364 \cdot 10^{-4}}{3,7 \times 0,77179} + \frac{10,04}{0,77179^{3/2} \times 486155} \right) \right]^{-2/5} \times \left[\frac{(400/3600)^2}{9,81 \times 0,03} \right]^{1/5} = 0,22542 m$$

viii. Le diamètre D ainsi calculé ne figure pas dans le tableau des diamètres commerciaux. Il se situe entre les diamètres commerciaux 200 mm et 250 mm. Il faut donc considérer le diamètre qui lui est directement supérieur, soit :

$$D = 250 \text{ mm} = 0,25 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en évaluant le gradient J de la perte de charge linéaire au sens de *Darcy-Weisbach*. Le coefficient de frottement f est :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}R} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{3,4364 \cdot 10^{-4}}{3,7 \times 0,77179} + \frac{10,04}{0,77179^{3/2} \times 486155} \right) \right]^{-2} = 0,01711779$$

Notons que le calcul du coefficient de frottement f aurait pu s'effectuer par la relation :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,77179}{16} = 0,01711495$$

Le gradient J de la perte de charge linéaire serait donc égal à :

$$J = \frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} = \frac{8 \times 0,01711779}{9,81 \times \pi^2} \times \frac{(400/3600)^2}{0,22542^5} = 0,03 = 3 \cdot 10^{-2}$$

Il s'agit bien de la valeur du gradient de la perte de charge linéaire J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.2.3. Le gradient J de la perte de charge est inconnu

II.2.3.1. Expression du coefficient de frottement

Il s'agit de proposer une relation explicite au calcul du coefficient de frottement f dans le cas où le gradient de la perte de charge linéaire J est le paramètre inconnu du problème. Les variables connues sont le débit volume Q , le diamètre D de la conduite, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

En l'absence de la valeur du gradient de la perte de charge linéaire J , la relation (1.33) de *Darcy-Weisbach* n'est d'aucune utilité pour l'évaluation du coefficient de frottement f .

Puisque Q , D , ε et ν sont les données du problème, alors la rugosité relative ε/D et le nombre de *Reynolds* R le sont aussi. Celui-ci est aisément déterminé par application de la relation (1.36).

Dans cette partie, nous assumons les égalités :

$$Q \neq \bar{Q} \text{ et } D = \bar{D}$$

Ceci implique bien évidemment que :

$$J \neq \bar{J} \text{ et } R \neq \bar{R}$$

En outre, étant donné que $Q \neq \bar{Q}$ et $D = \bar{D}$, le coefficient de frottement est donc régi par la relation (2.29) où le nombre de *Reynolds* \bar{R} est donné par (2.26).

Pour les valeurs données de ε/D et de R , la relation (2.26) permet le calcul du nombre de *Reynolds* \bar{R} , à condition d'utiliser un procédé itératif ou graphique.

L'étude de la relation (2.26) a montré qu'elle peut être remplacée, avec une excellente approximation, par la relation :

$$\bar{R} = 2R \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} \quad (2.63)$$

Ainsi, la relation (2.63) permet d'évaluer de manière explicite le nombre de Reynolds \bar{R} , pour les valeurs données de ε/D et de R . Par suite, le coefficient de frottement est aisément déterminé par application de la relation (2.29).

Exemple d'application 2.12.

Un écoulement se produisant dans une conduite circulaire sous pression dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité relative $\varepsilon/D = 2.10^{-4}$, est défini par un nombre de Reynolds $R = 5.10^5$. Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

- i. Ce problème peut être résolu par la méthode classique qui consiste à évaluer, par un procédé itératif appliqué à la relation implicite (1.35) de Colebrook-White ou par voie graphique sur le diagramme de Moody représenté par la figure 1.2, la valeur demandée du coefficient de frottement f pour les valeurs données de ε/D et de R .

Pour $\varepsilon/D = 2.10^{-4}$ et $R = 5.10^5$, la relation (1.35) de Colebrook-White donne la valeur :

$$f = 0,0154335$$

- ii. Résolvons le problème par la MMR. A partir des valeurs $\varepsilon/D = 2.10^{-4}$ et $R = 5.10^5$, la relation (2.63) donne la valeur du nombre de Reynolds \bar{R} , soit :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 2R \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} \\ &= 2 \times 5.10^5 \times \left[-\log \left(\frac{2.10^{-4}}{3,7} + \frac{5,5}{(5.10^5)^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 248591 \end{aligned}$$

- iii. En insérant les valeurs $\varepsilon/D = 2.10^{-4}$ et $\bar{R} = 248591$ dans la relation (2.29), la valeur recherchée du coefficient de frottement f est :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{248591} \right) \right]^{-2}$$

$$= 0,015433$$

Nous pouvons ainsi observer que la *MMR* donne le même résultat que celui issu de la relation implicite de *Colebrook-White*, tout au moins pour l'exemple d'application que nous avons considéré.

Afin de mieux apprécier la fiabilité de la relation (2.29), lorsqu'elle est utilisée simultanément avec la relation (2.63) pour l'évaluation du coefficient de frottement f , nous l'avons comparée à la relation implicite (1.35) de *Colebrook-White*. Les écarts relatifs sur le coefficient de frottement f sont alors représentés sur la figure (2.5), en fonction du nombre de *Reynolds* R et pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D .

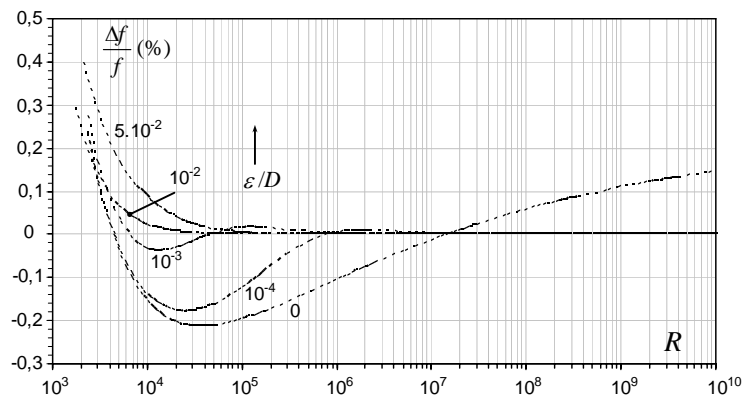


Figure 2.5 : Comparaison entre la relation de *Colebrook-White* et la relation (2.29), en fonction de R et pour diverses valeurs de ε/D

La figure 2.5 montre clairement que les écarts relatifs sur le coefficient de frottement f dépendent à la fois du nombre de *Reynolds* R et de la rugosité relative ε/D , tout en restant inférieurs à 0,4% dans la large gamme $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$ et pour $R > 2300$. Cet écart se réduit de moitié, soit 0,2%, pour $R \geq 4000$ et dans toute la large gamme $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$. Ceci confirme la fiabilité de la relation (2.29) où le nombre de *Reynolds* \bar{R} est donné par la relation (2.63).

Exemple d'application 2.13.

Une conduite lisse en charge, de forme circulaire, de diamètre $D=1,5m$ écoule, sous un gradient de la perte de charge linéaire $J=10^{-2}$, un débit $Q=3,527m^3/s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu=10^{-6}m^2/s$.

Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

- i. Le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement est, en vertu de la relation (1.36) :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \times 3,527}{\pi \times 1,5 \times 10^{-6}} = 2993810,6$$

- ii. La conduite étant lisse, la rugosité relative ε/D est : $\varepsilon/D = 0$

- iii. En application de la relation (2.63) pour $\varepsilon/D = 0$, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 2R \left[-\log \left(\frac{5,5}{R^{0.9}} \right) \right]^{-1} = 2 \times 2993810,6 \times \left[-\log \left(\frac{5,5}{2993810,6^{0.9}} \right) \right]^{-1} \\ &= 1176757 \end{aligned}$$

- iv. La valeur recherchée du coefficient de frottement f est, selon la relation (2.29) pour $\varepsilon/D = 0$:

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{10,04}{1176757} \right) \right]^{-2} = 0,0097298$$

- v. Par un procédé itératif, la relation implicite (1.37) donne pour f , la valeur :

$$f = 0,00972396$$

Ainsi, l'écart relatif entre les valeurs calculées de f aux étapes iv et v n'est que de 0,06%.

II.2.3.2. Expression du gradient J de la perte de charge

Pour les valeurs connues du débit volume Q , du diamètre D de la conduite, de la rugosité absolue ε et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement, il est possible d'évaluer de manière explicite le gradient J de la perte de charge linéaire.

En éliminant le coefficient de frottement f entre les relations (1.33) et (2.29), le gradient J de la perte de charge linéaire s'exprime par :

$$J = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (2.64)$$

Rappelons que le nombre de Reynolds \bar{R} est donné par la relation (2.63).

La relation (2.64) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent correspondant à $R > 2300$ et couvre la large gamme $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$. Elle occasionne une erreur relative maximale de 0,4%, qui se réduit à 0,2% pour les valeurs du nombre de Reynolds $R \geq 4000$.

Pour les valeurs données de Q , D , ε et ν , les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour l'évaluation du gradient J de la perte de charge linéaire :

- i. Avec les valeurs de Q , D et ν , la relation (1.36) permet le calcul du nombre de Reynolds R .
- ii. Les valeurs données de ε et de D permettent le calcul aisé de ε/D .
- iii. Les valeurs ainsi calculées de ε/D et de R sont insérées dans la relation (2.63) pour la détermination du nombre de Reynolds \bar{R} .
- iv. Les valeurs de Q , D , ε/D , \bar{R} sont introduites dans la relation (2.64) destinée au calcul du gradient J de la perte de charge linéaire.

Exemple d'application 2.14.

Une conduite circulaire sous pression de diamètre $D = 1,25 \text{ m}$, de rugosité absolue $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, écoule un débit volume $Q = 1,506 \text{ m}^3/\text{s}$ d'eau de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Quelle est la valeur du gradient J de la perte de charge linéaire ?

- i. Le nombre de Reynolds R caractérisant l'écoulement est, selon la relation (1.36) :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \times 1,506}{\pi \times 1,25 \times 10^{-6}} = 1533999$$

- ii. La rugosité relative est :

$$\varepsilon / D = 5 \cdot 10^{-4} / 1,25 = 4 \cdot 10^{-4}$$

- iii. Selon la relation (2.63), le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 2R \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} \\ &= 2 \times 1533999 \times \left[-\log \left(\frac{4 \cdot 10^{-4}}{3,7} + \frac{5,5}{1533999^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 784639,32 \end{aligned}$$

- iv. La valeur recherchée du gradient J de la perte de charge linéaire est donc, en vertu de la relation (2.64) :

$$\begin{aligned} J &= \frac{2Q^2}{g \pi^2 D^5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \\ &= \frac{2 \times 1,506^2}{9,81 \times \pi^2 \times 1,25^5} \left[-\log \left(\frac{4 \cdot 10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{784639,32} \right) \right]^{-2} = 10^{-3} \end{aligned}$$

- v. Cette étape vise à vérifier la valeur de J calculée à l'étape iv, par

application de la relation (1.33) de *Darcy-Weisbach*. Celle-ci requiert la valeur du coefficient de frottement f que nous déterminerons par un procédé itératif appliqué à la relation (1.35) de *Colebrook-White*. Pour les valeurs de $\varepsilon/D = 4 \cdot 10^{-4}$ et de $R = 1533999$, le calcul indique pour f la valeur :

$$f = 0,016290258$$

Ainsi, la relation (1.33) mène finalement à :

$$J = \frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} = \frac{8 \times 0,016290258}{9,81 \times \pi^2} \times \frac{1,506^2}{1,25^5} = 10^{-3}$$

Exemple d'application 2.15.

Reprenons l'exemple d'application 2.10, pour lequel le gradient J est maintenant le paramètre à rechercher. Les données du problème sont :

$$Q = 0,55 \text{ m}^3/\text{s}; D = 1 \text{ m}; \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

i. Le nombre de *Reynolds* R est, selon la relation (1.36) :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \times 0,55}{\pi \times 1 \times 10^{-6}} = 700281,75$$

ii. La rugosité relative est :

$$\varepsilon / D = 10^{-3} / 1 = 10^{-3}$$

iii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} est, en vertu de la relation (2.63) :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 2R \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} \\ &= 2 \times 700281,75 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3}}{3,7} + \frac{5,5}{700281,75^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 397634,583 \end{aligned}$$

vi. Le gradient J de la perte de charge linéaire est donc, selon la relation (2.64) :

$$J = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R} \right) \right]^{-2} = \frac{2 \times 0,55^2}{9,81 \times \pi^2 \times 1^5} \times$$
$$\left[-\log \left(\frac{10^{-3}}{3,7} + \frac{10,04}{597634,583} \right) \right]^{-2} = 0,00050163 \cong 5.10^{-4}$$