



CALCUL DES ECOULEMENTS FILAIRES A TRAVERS UN DEVERSOIR LATERAL PAR ELEMENTS FINIS

COMPUTATION OF 1D SIDE WEIR FLOW BY FINITE ELEMENT METHOD

AMARA L.¹, BERREKSI A.²

¹ Département de Génie Civil et Hydraulique, Faculté de Technologie, Université de Jijel, 18000, Jijel. Laboratoire de Recherche LARHYSS, Université de Biskra, 07000, Biskra, Algérie

² Laboratoire de recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE). Faculté de Technologie, Université de Bejaia, 06000, Bejaia, Algérie.

amara.lyes@yahoo.fr ; berreksi.ali@gmail.com

RESUME

Dans ce travail, une approche numérique par éléments finis a été proposée pour l'intégration de l'équation différentielle non linéaire de l'écoulement par-dessus un déversoir latéral sur canal rectangulaire. Après avoir rappelé l'équation aux dérivées ordinaires régissant le problème, la modélisation numérique est donnée et ceci par usage de la méthode des résidus pondérés de Galerkin. Le problème étant à valeur initiale de Cauchy, la matrice élémentaire obtenue a été réécrite en formule de récurrence. La non-linéarité de cette dernière est traitée par un processus itératif pour les variables d'état ; la profondeur de l'écoulement et le débit déversé. Les performances de cette approche numérique sont confrontées aux mesures expérimentales disponibles dans la littérature suivant les régimes d'écoulement incidents. Les résultats obtenus montrent une très bonne concordance avec les observations expérimentales.

Mots clés : Déversoir latéral, Modèle numérique, Eléments finis, Résidus pondérés, Méthode de Galerkin.

ABSTRACT

In this work, a numerical approach using finite element method is proposed for the integration of the nonlinear differential equation of the side weir flow in rectangular channel. After recalling the ordinary differential equation governing the problem, the numerical modeling is given by use of the Galerkin weighting residual method. The problem being of Cauchy with initial value, the element matrix obtained was rewritten in recurrence formula. The non-linearity of the latter is treated by an iterative technique for the variables; flow depth and lateral outflow. The performances of the numerical approach are confronted with experimental measurements available in the literature according to different flow regimes. The results obtained show a good agreement with the experimental observations.

Key words: Side weir, Numerical model, Finite elements, weighted residuals, Galerkin's method.

INTRODUCTION

Les déversoirs latéraux ont reçu un usage répandu pour le contrôle du niveau d'eau pour l'irrigation et les systèmes de canaux de drainage afin de dévier les excès d'eau dans les canaux des ouvrages de protection contre les crues. Ils ont également été utilisés comme déversoirs d'orage pour les réseaux d'assainissement urbain (May et al., 2003). La complexité physique du problème a conduit à la naissance de diverses approches simplifiées (empiriques essentiellement ou autres), proposées pour évaluer le débit de déversement en fonction des caractéristiques géométrique et hydraulique du couple canal-déversoir. Cependant, ces approches simplistes souffrent de beaucoup de manques et conduisent à des résultats peu fiables dans plusieurs cas et surtout ne permettent pas d'obtenir la ligne d'eau sur l'échancrure de l'ouvrage. Ainsi, le retour à l'approche mécaniste rigoureuse consistant à résoudre directement l'équation du mouvement se présente comme le seul outil fiable pour l'étude de ces écoulements spatialement variés.

Les premières investigations pionnières à ce sujet furent l'œuvre de De Marchi (1934) qui a donné l'équation du débit spatialement varié à débit décroissant. Des travaux ultérieurs, à l'image de ceux de Favre et Braendele (1937) et autres, visaient à vérifier expérimentalement les prédictions théoriques du modèle. Des améliorations s'avéraient alors nécessaires pour les régimes supercritiques. D'autres contributions se versaient alors dans l'amélioration des connaissances

des coefficients du débit à l'image de ceux de Subramanya et Awasthy (1972). Ultérieurement, plusieurs chercheurs se sont penchés sur la question du peaufinage du modèle mathématique. Balmforth et Sarginson (1983), Hager et Hager (1985) ont inclus l'effet de courbure des lignes de courant en régime supercritique. Hager (1986, 1987) a proposé un modèle où les effets d'obliquité des lignes de courant, pertes de charge et intensité du débit latéral ont été introduits. Des solutions nomographiques générales sont alors proposées pour les profils de surface. Une généralisation de la théorie a été donnée pour toute sortie latérale par Hager et Volkart (1986). Plus récemment, Castro-Orgaz et Hager (2011, 2012) ont revu les effets d'angle du flux déversé, distribution des vitesses et pressions et aussi l'inertie verticale.

Dans ces dernières années, quelques solutions analytiques directes ont été déduites pour l'étude des déversoirs de hauteur de pelle nulle, à l'image du travail de Mizumura et al. (2003) et celui de Michelazzo (2015). Cependant ces solutions ne sont valides que pour le cas d'un écoulement supercritique ou subcritique respectivement à sortie latérale directe. Ceci incite à un retour au traitement numérique du problème pour se délester de toute hypothèse astreignante. A présent, l'état de l'art en matière du calcul numérique des équations 1D du problème du déversoir latéral sur canal rectangulaire montre que l'approche aux différences finies est la plus répandue. Celles-ci couvrent, les méthodes classiques de type Euler (Granata et al., 2013), Simpson (Rao et Pillai, 2008), ou celle de Runge-Kutta (Robinson et McGhee, 1993 ; Ghodsian, 2003 ; Castro-Orgaz et Hager, 2011). Le présent travail vise alors à introduire l'approche aux éléments finis de Galerkin pour la résolution de l'équation différentielle de base du déversoir latéral. Dans un premier temps, cette équation est rappelée ainsi que les variables et paramètres impliqués. Par la suite une discrétisation de celle-ci par éléments finis est donnée pour ensuite passer à la validation et comparaison avec les observations expérimentales issues des travaux de Hager (1981). La présente approche peut être facilement étendue à d'autres problèmes similaires.

MODELE MATHEMATIQUE

Si l'on considère que l'écoulement est filaire dans un canal à déversoir latéral (Figure 1), une approche énergétique stipulant la constance de l'énergie mécanique totale dans une section de déversement, associée à l'hypothèse d'une répartition uniforme du champ vertical de la vitesse, permet facilement de montrer que l'équation différentielle de la ligne d'eau s'écrit comme suit (Subramanya, 2009):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{\alpha Q q_*}{gA^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}} \quad (1)$$

Dans laquelle $y = y(x)$ est la profondeur de l'écoulement à une section d'abscisse x , S_0 et S_f sont respectivement la pente du fond du canal et celle du frottement, $Q = Q(x)$ le débit dans la section donnée, A et B étant, dans l'ordre, la section mouillée et la largeur au miroir et α le coefficient de correction cinétique dû à l'inégale répartition des vitesses, pris égale à l'unité.

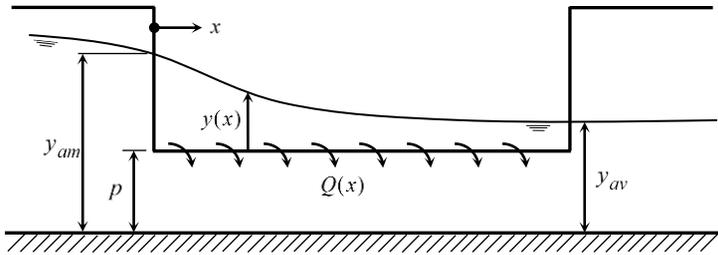


Figure 1 : Schéma de définition des paramètres du déversoir latéral

L'intensité du débit latéral par unité de largeur q_* est donnée par :

$$q_* = \frac{-dQ}{dx} = \frac{2}{3} C_M \sqrt{2g} (y - p)^{3/2} \quad (2)$$

Où p est la hauteur de pelle du déversoir, g l'accélération de la pesanteur et C_M coefficient de débit connu sous le nom de coefficient de De Marchi. Plusieurs formules ont été proposées pour l'évaluation de ce coefficient. Pour un déversoir à crête mince, on retient l'approximation suivante (Featherstone et Nalluri, 1995):

$$C_M = 0,81 - 0,6F_1 \quad (3)$$

Ici F_1 représente le nombre de Froude de l'écoulement incident. Les équations (1) et (2), couplées ensemble alors, décrivent complètement l'écoulement à

travers un déversoir latéral. Le système forme donc une équation différentielle (EDO) non linéaire de premier ordre qui doit être résolue pour accéder à la forme de la ligne d'eau et le débit déversé sur l'échancrure.

SOLUTION NUMERIQUE PAR ELEMENTS FINIS

Du point de vue mathématique, le problème considéré est à valeur initiale ou de Cauchy. La seule connaissance de l'une des conditions initiales (suivant le type de régime d'écoulement) permet alors d'intégrer l'EDO (1) par récurrence dans l'espace. Pour ce faire, une approche par éléments finis de Galerkin est adoptée. Elle consiste à discrétiser le domaine (échancrure du déversoir) en éléments linéaires et annuler le résidu pondéré par la fonction de forme sur chaque élément (Reddy, 2005). Cette démarche permet alors d'aboutir à un système d'équations algébriques qu'il conviendrait alors de résoudre. Pour résoudre l'équation (1), écrivons celle-ci sous la forme générale suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad (4)$$

Dans la méthode de Galerkin, la solution de l'équation (4) en éléments finis de longueur Δx est recherchée en supposant une approximation de la fonction $y(x)$ en termes de ses valeurs nodales comme suit (Connor et Brebbia, 1976):

$$y(x) \approx \hat{y} = \sum_{i=1}^n y_i N_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 \quad (5)$$

Avec y_i les valeurs nodales inconnues et N_i les fonctions de forme définies sur chaque élément. L'introduction de l'approximation (5) dans l'équation différentielle (4) occasionne donc un résidu $\mathfrak{R}(x)$ tel que :

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{d\hat{y}}{dx} - \varphi(x, y) \quad (6)$$

Celui-ci est alors annulé au sens global sur chaque élément comme suit :

$$\mathfrak{R}(x) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d\hat{y}}{dx} - \varphi(x, y) \right] N_i dx = 0 \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

L'adoption d'une fonction de forme linéaire, traduisant la variation du champ de la variable dépendante sur chaque élément, comme :

$$N_1 = \frac{x_j - x}{\Delta x} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{x - x_i}{\Delta x} \tag{8}$$

permet alors d’aboutir à la matrice élémentaire suivante :

$$\int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} N_1 \frac{dN_1}{dx} & N_1 \frac{dN_2}{dx} \\ N_2 \frac{dN_1}{dx} & N_2 \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} dx = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \varphi(x, y) N_1 \\ \varphi(x, y) N_2 \end{bmatrix} dx \tag{9}$$

Tout calcul fait, cette dernière prendra la forme finale suivante :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} (1 - \Psi)\varphi_1(x, y) + \Psi\varphi_2(x, y) \\ \Psi\varphi_1(x, y) + (1 - \Psi)\varphi_2(x, y) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Avec $\Psi \in [0,1]$ facteur de pondération ayant pour expression :

$$\Psi = \frac{\int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx}{\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx} \tag{11}$$

L’évaluation des intégrales de l’expression (11) donne $\Psi = 1/3$ qui est une valeur spécifique à l’approche de Galerkin (voir annexe). Classiquement, à partir de la matrice élémentaire (10), une matrice globale est construite pour ensuite incorporer les conditions aux limites (problème de Dirichlet), or ici le problème est autre. Ainsi donc, la matrice (11) est convertie en un schéma de récurrence, non linéaire dans ce cas, qu’il est question de résoudre par une technique numérique appropriée pour trouver y_{n+1} connaissant y_n (Zienkiewicz et Taylor, 2000 ; Amara et al., 2014).

RESULTATS ET DISCUSSION

La vérification du modèle numérique par éléments finis est faite sur les données expérimentales puisées à partir des travaux de Hager (1981), élaborés dans le cadre de Thèse au laboratoire d’Hydraulique de l’ETH Zurich. Afin de déterminer la ligne d’eau le long du déversoir latéral, plusieurs expériences ont été conduites sous différentes configurations du déversoir et conditions

hydrodynamiques. Dans ce qui suit, on retient quatre (04) cas de test dont trois d'entre eux concernent le régime subcritique (Essais B, D et E) alors que le cas supercritique est couvert par un seul essai (J). Le tableau 1 donne les paramètres des essais expérimentaux adoptés pour la validation du modèle numérique.

La vérification des résultats numériques est faite sur la base de la ligne d'eau $y(x)$ sur le déversoir ainsi que le débit total déversé par-dessus l'échancrure. Ainsi, pour le régime supercritique, il s'agira de prédire la profondeur aval y_{av} et le débit résiduel à l'aval Q_{av} connaissant ces paramètres en amont. Quant au cas du régime subcritique, l'inverse est adopté en prédisant respectivement la profondeur y_{am} et le débit amont Q_{am} .

Tableau 1 : Données des essais expérimentaux (Hager, 1981)

Données	Essais			
	J	B	D	E
Longueur du déversoir (m)	1	1	1	1
Largeur du canal (m)	0,3	0,3	0,3	0,3
Coefficient de rugosité (n)	0,01	0,01	0,01	0,01
Hauteur de pelle (cm)	0	10	10	15
La pente du fond ($\%_{00}$)	20	3	0,5	3
Débit amont (l/s)	40,0	39,0	38,5	38,9
Débit aval (l/s)	22,7	0,0	20,0	19,5

Il est à noter que dans la pratique, pour ce cas de figure, une démarche itérative est suivie pour l'étude du déversement latéral car c'est les paramètres aval qu'il est question de trouver. Les figures 2 à 5 résument les résultats de calcul des essais J, B, D et E respectivement, illustrant l'allure de la ligne d'eau confrontée aux mesures expérimentales.

En régime supercritique (Essai J), comme la théorie le démontre, la ligne d'eau prend une allure convexe de gradient dy/dx négatif et de courbure d^2y/dx^2 positive (Figure 2). De fait, l'intensité du débit latéral q est décroissante le long du déversoir. Pour ce test, la prédiction du modèle numérique est très bonne comparativement aux mesures expérimentales. Le débit déversé prédit est de 17,01 l/s, soit une déviation de 1,67 % seulement de l'expérience.

Le second test (Essai B) concerne celui d'un régime subcritique (Figure 3). Ici, il est à noter que l'aval est obturé et aucun écoulement ne subsiste ($Q_{av} = 0$) après le déversoir et le canal est alors en impasse. Le profil de la ligne d'eau prend une forme concave ($d^2y/dx^2 < 0$) et par suite un débit déversé croissant $dQ(x)/dx > 0$.

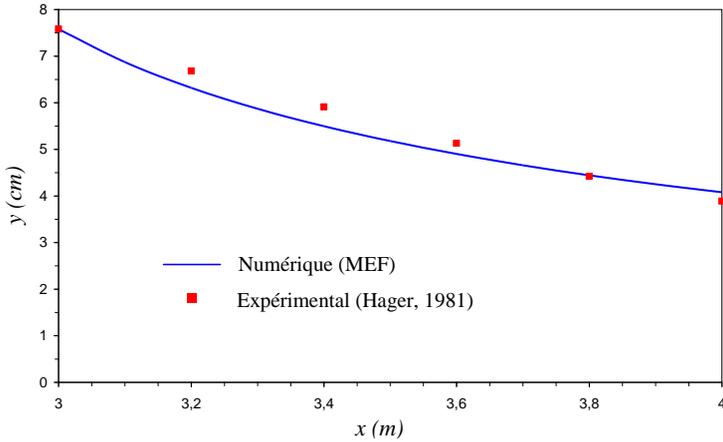


Figure 2 : Ligne d'eau sur l'échancrure du déversoir (Essai J)

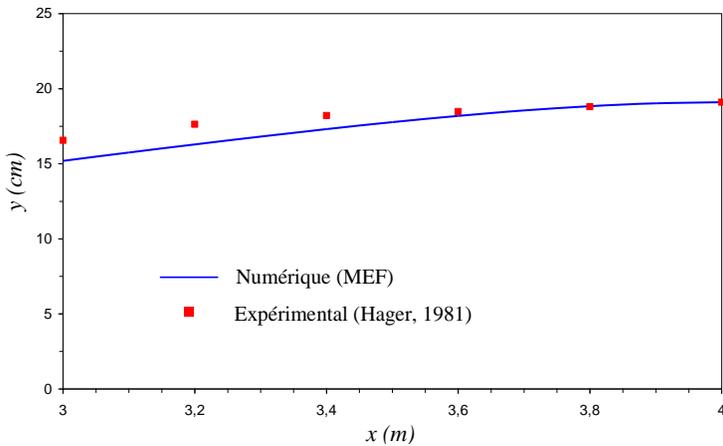


Figure 3 : Ligne d'eau sur l'échancrure du déversoir (Essai B)

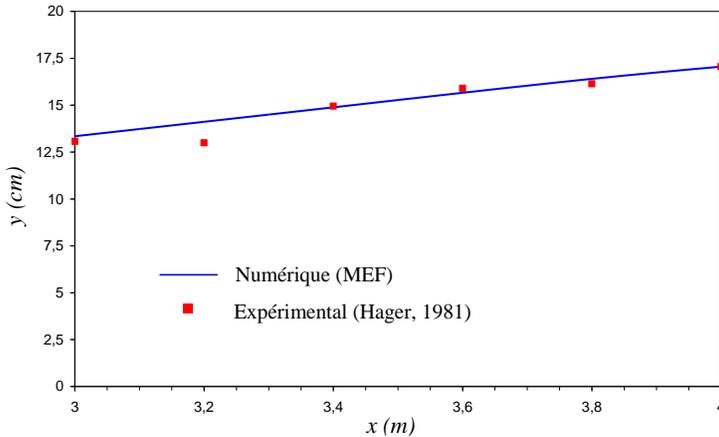


Figure 4 : Ligne d'eau sur l'échancrure du déversoir (Essai D)

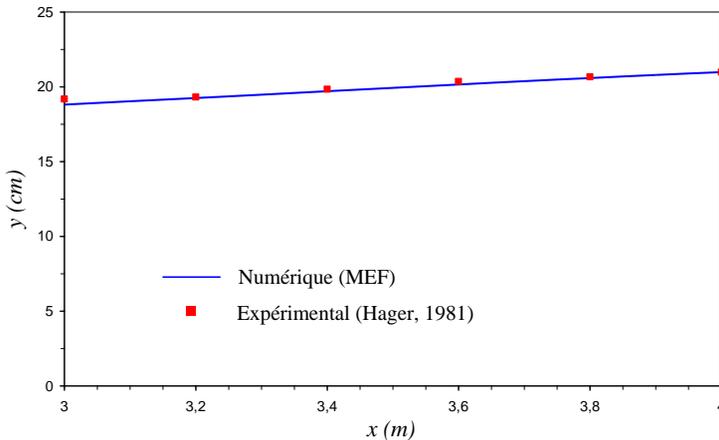


Figure 5 : Ligne d'eau sur l'échancrure du déversoir (Essai E)

La comparaison des résultats avec les mesures montre un léger écart, dû à un remous d'impasse, dans la prédiction de la ligne d'eau vers l'amont, sans incidence pour des fins pratiques (moins de 1,4 cm).

Les essais D et E concernent tout deux le cas du régime subcritique. Les figures 4 et 5 montrent respectivement le profil de la surface libre obtenu par calcul numérique et celui observé. Sur la figure 4, s'y rattachant à l'essai D, on observe une très bonne concordance, excepté au point $x = 3,2$ m. Des fluctuations de la surface sont ici notées en raison du régime presque critique. Le modèle mathématique (1) ne tient pas alors compte de ces effets et un

modèle incluant les effets de courbure est donc nécessaire pour reproduire ces effets secondaires. Toutefois, les modèles dédiés à ces phénomènes (Balmforth et Sarginson, 1983 ; Hager et Hager 1985 ; Castro-Orgaz et Hager, 2011) sont d'une complexité notable et s'y prêtent avec beaucoup de difficultés pour un traitement analytique ou numérique. Pour le dernier test, la ligne d'eau, reportée sur la figure 5, révèle une bonne congruence avec l'observation expérimentale. Le débit déversé dévie de 1% seulement du débit réel observé alors que la ligne d'eau est prédite à moins de 2% d'erreur au maximum.

L'ensemble des résultats, comparés aux observations expérimentales sont regroupés dans le tableau 2 ci-dessous.

Tableau 2 : Comparatif des résultats pour les divers tests

Essai	Paramètres	Numériques	Expérimental	Erreur relative (%)
J	Q_{av} (l/s)	22,99	22,70	1,28
	y_{av} (cm)	4,08	3,89	4,88
B	Q_{am} (l/s)	40,55	39,00	3,97
	y_{am} (cm)	15,20	16,56	8,21
D	Q_{am} (l/s)	39,03	38,50	1,38
	y_{am} (cm)	13,34	13,07	2,07
E	Q_{am} (l/s)	39,68	38,90	2,01
	y_{am} (cm)	18,81	19,18	1,93

Il en découle de l'analyse de ce tableau que la déviation entre les prédictions théoriques par éléments finis et les observations est très confinée en deçà de 4% pour les débits et environ 8% au maximum pour la profondeur d'eau d'extrémité. Pour des fins pratiques, ces écarts relatifs sont dérisoires et une amélioration des résultats doit être envisagée, entre autres, en faisant usage d'un modèle mathématique plus complet où les effets dus au caractère bidimensionnel de l'écoulement et ceux de la courbure des lignes de courants sont considérés intrinsèquement.

CONCLUSION

Une approche numérique aux éléments finis de Galerkin a été présentée dans ce travail. Cette technique, à l'instar de ses homologues aux différences finies, concourt à la résolution numérique de l'équation différentielle non linéaire de l'écoulement spatialement varié. La méthode diffère de par son soubassement théorique et lui permet, dans nombres de cas, d'obtenir des solutions d'une précision notables. La méthode des différences finies, très répandue pour ce genre de problème, se voit alors déduite comme cas particulier de cette approche, ce qui lui confère un caractère de généralité.

Après avoir rappelé l'équation différentielle de base de l'écoulement par-dessus un déversoir latéral, la formulation par éléments finis a été donnée. Dans cette dernière, une approche aux résidus pondérés de Galerkin a été adoptée. La matrice élémentaire qui en résulte a été convertie en équation de récurrence en compatibilité avec la nature physique du problème (problème de Cauchy). La non-linéarité algébrique est traitée par les algorithmes numériques dédiés à cet effet. La nature implicite provient du facteur de pondération Ψ , qui pour la technique de Galerkin, prend une valeur intermédiaire entre 0 et 1. Ces valeurs limites sont en fait obtenues si une approche de collocations par points est appliquée (par des impulsions de Dirac) aux nœuds des éléments. La méthode des différences finies classique (Euler explicite et implicite) est alors recouverte pour ces deux valeurs limites.

L'application de la méthode présentée a été testée et confrontée aux observations expérimentales issues des travaux de Hager (1981). Ces expériences ont couverts le déversement en régime subcritique et supercritique.

Il était alors question de prédire la ligne d'eau ainsi que le débit déversé. Pour l'ensemble des quatre tests, les résultats concordent assez bien, dans une grande plage, avec les mesures expérimentales. Ceci étant bien évidemment tributaire du modèle mathématique de base qui ne prend pas en considération les effets de courbure et d'orientation des lignes de courant sur l'échancrure. Ces effets peuvent d'ailleurs bien être traité par l'approche présentée ici, cependant au prix d'un calcul plus poussé, rançon inévitable lorsque la nécessité le justifie.

ANNEXE

Nous donnons dans ce qui suit le détail de l'évaluation des intégrales $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y) N_i dx$ et du facteur de pondération Ψ . En vertu de l'ordre d'approximation de la fonction de forme N_i , considérons une approximation linéaire de $\varphi(x, y)$ tel que :

$$\varphi(x, y) = \varphi_i + \frac{x}{\Delta x} (\varphi_i + \varphi_{i+1}) \tag{A1}$$

Ou encore :

$$\varphi(x, y) = \varphi_i \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) + \varphi_{i+1} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \tag{A2}$$

qui est de la forme $\varphi(x, y) = N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2$. Ainsi, l'intégrale pondérée de cette fonction au nœud $i = 1$ donne:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y) N_1 dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\varphi_1 \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) + \varphi_2 \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right] N_1 dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 (N_1 \Delta x - N_1 x) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 (N_1 x) dx \end{aligned} \tag{A3}$$

En tirant $\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx$ comme facteur dans le second membre, on aura :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y) N_1 dx &= \frac{\varphi_1}{\Delta x} \left(1 - \frac{\int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx}{\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx} \right) \int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx \\ &\quad + \frac{\varphi_2}{\Delta x} \left(\frac{\int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx}{\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx} \right) \int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx \end{aligned} \tag{A4}$$

Si l'on pose : $\Psi = \int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx / \int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx$, il en résulte :

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y) N_1 dx = \frac{\varphi_1}{\Delta x} (1 - \Psi) \int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx + \frac{\varphi_2}{\Delta x} \Psi \int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx \quad (A5)$$

Par ailleurs, on peut facilement calculer que :

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx = \frac{\Delta x^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx = \frac{\Delta x^2}{2} \quad (A6)$$

Par voie de conséquence, $\Psi = 1/3$ et l'équation (A5) devient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y) N_1 dx = \frac{\Delta x}{2} [(1 - \Psi)\varphi_1 + \Psi\varphi_2] = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{2}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2 \right] \quad (A7)$$

Un raisonnement similaire permet sans difficulté d'aboutir à :

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y) N_2 dx = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2 \right] \quad (A8)$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AMARA L., BERREKSI A., ACHOUR B., ABDOUNE K. (2014). Numerical Computation of Water Level Fluctuation in Surge Tanks Using the Galerkin Method. *Dam Engineering*, vol. 25, no 1, pp. 23-35.
- BALMFORTH D. J., SARGINSON E. J. (1983). The effects of curvature in supercritical side weir flow. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 21, no 5, pp. 333-343.
- CASTRO-ORGAZ O., HAGER W. H. (2011). Spatially-varied open channel flow equations with vertical inertia. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 49, no 5, pp. 667-675.
- CASTRO-ORGAZ O., HAGER W. H. (2012). Subcritical side-weir flow at high lateral discharge. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 138, no 9, pp. 777-787.
- CONNOR J. J., BREBBIA C. A. (1976). *Finite element techniques for fluid flow*. Newness-Butterworths, London, 310 p.
- DE MARCHI G. (1934). Saggio di teoria funzionamento degli stramazzi laterali. *Energia Elettrica*, 11, pp. 849-860.
- FAVRE H., BRAENDLE F. (1937). Expériences sur le mouvement permanent de l'eau dans les canaux découverts, avec apport ou prélèvement le long du courant. *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, vol. 63, pp.93-96, pp.109-114, pp.129-134.
- FEATHERSTONE R. E., NALLURI C. (1995). *Civil engineering hydraulics: Essential theory with worked examples*. Blackwell Science Ltd, 401 p.

- GHODSIAN M. (2003). Supercritical flow over a rectangular side weir. *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 30, no 3, pp. 596-600.
- GRANATA F., DE MARINIS G., GARGANO R. (2013). A Flow Power Based Approach For Side Weirs. In : 35 th IAHR Congress, Chengdu, China.
- HAGER W. H. (1981). Die Hydraulik von Verteikanaelen (L'hydraulique des canaux à débit décroissant). Thèse de Doctorat en sciences techniques, Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich, ETH, Zurich, Suisse, N°6948, partie I, 332 p, partie II, 322 p.
- HAGER W. H. (1986). L'écoulement dans des déversoirs latéraux. *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 13, no 5, pp. 501-509.
- HAGER W. H. (1987). Lateral outflow over side weirs. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 113, no 4, pp. 491-504.
- HAGER W. H., HAGER K. (1985). Streamline curvature effects in distribution channels. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 199, no 3, pp. 165-172.
- HAGER W. H., VOLKART P. U. (1986). Distribution channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 112, no 10, pp. 935-952.
- MAY R. W. P., BROMWICH B. C., GASOWSKI Y., RICKARD C.E. (2003) Hydraulic design of side weirs. Thomas Telford, London, 133 p.
- MICHELAZZO G. (2015). New analytical formulation of De Marchi's model for a zero-height side weir. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 141, no 12, pp. 04015030.
- MIZUMURA K., YAMASAKA M., ADACHI J. (2003). Side outflow from supercritical channel flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 129, no 10, pp. 769-776.
- RAO K. D., PILLAI C. R. S. (2008). Study of flow over side weirs under supercritical conditions. *Water resources management*, vol. 22, no 1, pp. 131-143.
- REDDY J. N. (2005). An introduction to the finite element method, Me Graw Hill, India, 755 p.
- ROBINSON D. I., MCGHEE T. J. (1993). Computer modeling of side-flow weirs. *Journal of irrigation and drainage engineering*, vol. 119, no 6, pp. 989-1005.
- SUBRAMANYA K., AWASTHY S. C. (1972). Spatially varied flow over side-weirs. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 98, no 1, pp. 1-10.
- SUBRAMANYA K. (2009). *Flow in Open Channels*. 3e, Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, 547 p.
- ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L. (2000). *The finite element method: The basis* (Vol. 1). Butterworth-heinemann, 689 p.