



## DIMENSIONNEMENT D'UN CANAL RECTANGULAIRE EN ÉCOULEMENT CRITIQUE

### DESIGN OF RECTANGULAR CHANNEL AT CRITICAL FLOW

*NEBBAR M.L.<sup>1</sup>, ACHOUR B.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Département de Génie Civil et d'Hydraulique, Faculté des Sciences et de la technologie, Université Mohamed Khider Biskra, Algérie.

<sup>2</sup>Laboratoire de recherche en Hydraulique Souterraine et de surface (LARHYSS), Université Mohamed Khider Biskra,

*nebbarm171@yahoo.fr*

### RESUME

L'objectif de ce travail est de proposer une nouvelle approche au calcul de la dimension linéaire d'un canal rectangulaire en écoulement critique, dont les parois internes sont caractérisées par la rugosité relative  $\varepsilon / D_h$ . Le calcul tient compte l'effet de la viscosité cinématique  $\nu$  de liquide en écoulement, à travers le nombre de Reynolds  $R$ . Cette approche repose d'une part sur les relations universellement admises de *Darcy-Weisbach* (1854) et de *Colebrook-White* (1939), et sur l'application de la relation de l'écoulement critique ou critère de criticité d'autre part. Des relations explicites sont déduites et les résultats qui en découlent peuvent être considérés comme étant exacts. Elles s'appliquent dans toute la gamme de rugosités relatives  $0 \leq \varepsilon / D_h \leq 5.10^{-2}$  et pour toute valeur du nombre de Reynolds  $R_e > 2300$ . Le développement théorique montre que l'équation régissant la dimension linéaire du canal en régime d'écoulement critique est de troisième ordre dont la résolution est rendu possible par les fonctions trigonométriques.

**Mots clés :** Canal rectangulaire, écoulement critique, rugosité relative, viscosité cinématique, dimensionnement.

## **ABSTRACT**

The objective of this work is to propose a new approach to the calculation of the linear dimension of a rectangular channel at critical flow, whose internal walls are characterized by the relative roughness  $\varepsilon/D_h$ . The calculation takes into account the effect of kinematic viscosity of flowing liquid, through the Reynolds number  $R$ . This approach is based on one hand on the universally accepted relations of Darcy-Weisbach (1854) and Colebrook-White (1939)), and on the application of the critical flow relation on the other hand. Explicit relationships are inferred and the results can be considered as accurate. They apply in the whole range of the relative roughness  $0 \leq \varepsilon/D_h \leq 5.10^{-2}$  and for any value of Reynolds number  $Re > 2300$ . The theoretical development shows that the equation governing the linear dimension of the channel in critical flow regime is of third order whose resolution is made possible by trigonometric functions.

**Keywords:** channel flow, relative-roughness, viscosity, regime, critical flow, rectangular, design.

## **INTRODUCTION**

L'étude de l'écoulement critique dans des canaux prismatique, c'est-à-dire des canaux dont la section  $A$  est indépendante de la direction longitudinale  $x$ , est d'un intérêt particulier (Hager ; Schleiss, 2009). Il est certain que l'établissement de l'écoulement en régime critique est largement connu dans l'hydraulique à surface libre, le plus souvent au-dessus des singularités insérées dans les canaux ouverts (Jacon, 1986). Dans l'étude de l'écoulement graduellement varié, l'intérêt du régime critique est la caractérisation du type de courbe de remous. Cet intérêt est prépondérant dans l'étude qualitative systématique de classification des différentes lignes d'eau des mouvements permanents graduellement variés. L'écoulement critique, caractérisé par une courbe de variation de l'énergie en fonction de la profondeur, montre qu'au voisinage de l'écoulement critique, une petite variation de l'énergie provoque une grande variation de profondeur d'écoulement (Bakhmetef, 1932). Ainsi l'écoulement critique est instable dues aux fluctuations de la surface libre caractérisées par une vitesse critique égale la célérité d'onde. (Chow, 1973 ; Henderson, 1966 ; French, 1985). La profondeur critique correspond au minimum de la charge et au maximum de débit volume  $Q$  franchissant la section

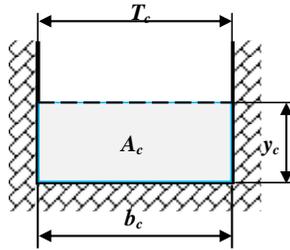
critique. Quand le nombre de Froude est inférieur à 0,86 ou supérieur à 1,13, ces instabilités disparaissent (U.S. Army Corps of Engineers, 1995).

L'objectif de ce travail est le dimensionnement théorique d'un canal rectangulaire en écoulement critique. Le choix de ce canal est dû à sa large utilisation dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien, à savoir l'évacuation des crues et l'irrigation. Afin de définir la géométrie de l'écoulement dans un canal rectangulaire partiellement rempli représentée sur la figure 1 ci-dessous, on introduit la variable adimensionnelle définie par  $\eta_c = y_c / b_c$  appelé paramètre de forme de l'aire de la section mouillée critique ou la profondeur relative normale critique. Le dimensionnement considéré dans cette étude est fondé sur l'approche de dimensionnement des conduites circulaires sous pression (Achour et Bedjaoui, 2010), en considérant l'écoulement uniforme en régime critique et en introduisant la condition de criticité. Il s'agit donc de proposer une solution explicite, permettant de calculer, avec une précision suffisante la largeur critique  $b_c$ . Le calcul de la largeur critique  $b_c$  nécessite la connaissance de quatre autres paramètres régissant l'écoulement à savoir le coefficient de frottement  $f_c$  de *Darcy-Weisbach* où le coefficient de frottement critique, le paramètre de forme de l'aire de la section mouillée critique  $\eta_c$ , la pente critique  $I_c$  du canal et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Ces paramètres sont liés par la relation fonctionnelle  $\varphi_c(a_c, Q_c, I_c, \varepsilon, \eta_c, \nu) = 0$ . L'emploi de cette relation pour la détermination de la dimension linéaire représentée par la largeur  $b_c$ , mène à une équation de troisième ordre. La résolution analytique de cette équation, basée sur les fonctions trigonométriques, conduit à une expression exacte de la dimension linéaire  $a_c$ . Lorsqu'il s'agit de calculer le débit volume critique  $Q_c$ , pour des valeurs données des paramètres :  $f_c, I_c, \eta_c$  et  $b_c$ , le problème est alors explicite en vertu la condition de criticité. Il n'existe à l'heure actuelle aucune méthode susceptible de résoudre la relation fonctionnelle  $\varphi_c(a_c, Q_c, I_c, \varepsilon, \eta_c, \nu) = 0$ . Pour répondre à cette catégorie de problèmes les études existantes proposent soit une résolution graphique ou des solutions itératives basées toutes sur un coefficient de résistance à l'écoulement constant.

## **CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DU CANAL**

Le canal considéré dans la présente étude est uniforme et découvert. A la surface libre la pression est égale à la pression atmosphérique. Les principaux

éléments que l'on peut définir à partir de la section mouillée sont représentés par la figure 1 ci-dessous.



**Figure 1 : Schéma de définition de l'écoulement critique dans un canal ouvert de section rectangulaire**

Le canal est caractérisé par les paramètres géométriques et hydrauliques critiques suivants :

$T_c$  : la largeur au miroir critique, ou largeur mouillée critique ;

$b_c$  : largeur du canal siège d'un écoulement à l'état critique ;

$y_c$  : profondeur critique d'écoulement ;

$A_c$  : l'aire de la section mouillée critique, son expression s'écrit :

$$A_c = b_c y_c \quad (1)$$

$P_c$  : périmètre mouillé critique ; son expression s'écrit :

$$P_c = b_c + 2y_c \quad (2)$$

$I_c$  : pente critique.

A partir de ces éléments on définit les paramètres suivants :

$$R_{h,c} = \frac{A_c}{P_c} : \text{rayon hydraulique critique ;}$$

$$D_{h,c} = 4R_{h,c} = \frac{4A_c}{P_c} : \text{diamètre hydraulique critique ;}$$

$$\eta_c = \frac{y_c}{b_c} : \text{profondeur relative normale critique ;}$$

$$R_{e,c} = \frac{4Q_c}{p_c \nu} : \text{nombre de Reynolds critique.}$$

## DIMENSIONNEMENT DU CANAL

Le dimensionnement du canal étudié consiste essentiellement à la détermination de la dimension linéaire représenté par le paramètre  $b_c$ , pour les valeurs données des paramètres  $f_c, I_c, \eta_c$  et  $\nu$ . La détermination de la profondeur critique  $y_c$  passe par celle de  $\eta_c$ , où  $y_c = \eta_c b_c$ .

### Relations d'écoulement dans le canal

Dans notre approche de calcul, nous suivons la démarche suivante :

1. On fait recours à la relation qui régit l'écoulement critique ;
2. On applique la relation universelle de *Colebrook-White* ;
3. On introduit l'équation de *Darcy-Weisbach*.

La condition de criticité énonce que, quelle que soit la forme de la section droite du canal considéré, celle-ci s'écrit :

$$\frac{Q_c^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \quad (3)$$

Où

$T_c$  est la largeur du plan d'eau qui correspond à la largeur  $b_c$  du canal rectangulaire étudié : c'est-à-dire  $T_c = b_c$ , où  $A_c$  est l'aire de la section mouillée critique et  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

Toutes les relations régissant l'écoulement uniforme, restent applicables pour le cas de régime critique. En particulier, l'introduction de paramètre de forme critique  $\eta_c$ , mène à écrire que :

1. L'aire de la section mouillée critique est donnée par la relation (1) qui s'écrit :

$$A_c = b_c^2 \eta_c \quad (4)$$

2. Le périmètre mouillé critique  $P_c$  est calculé selon la relation (2). Nous obtenons l'expression suivante :

$$P_c = b_c (1 + 2\eta_c) \quad (5)$$

3. Le diamètre hydraulique critique  $D_{h,c}$  qui s'écrit, en vertu des relations (4) et (5) :

$$D_{h,c} = 4R_{h,c} = 4b_c \frac{\eta_c}{1 + 2\eta_c} \quad (6)$$

4. La condition de criticité donnée par la relation (3) et qui mène à écrire que :

$$Q_c = \sqrt{g} b_c^{5/2} n_c^{3/2} \quad (7)$$

La relation (7) ne permet pas d'évaluer le débit critique  $Q_c$ , en l'absence de la valeur de la largeur  $b_c$  du canal.

5. Le nombre de Reynolds  $R_{e,c}$  caractérisant l'écoulement critique, est :

$$R_{e,c} = \frac{4Q_c}{p_c \nu} ; \text{ il est à noter que le régime critique est défini par le nombre de}$$

Reynolds  $R_l$ , appelé parfois critérium (Carlier, 1986) qui marque la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent. Le régime critique peut, en effet, exister dans l'un ou l'autre de ces deux modes d'écoulement.

Ou bien :

$$R_{e,c} = 4\sqrt{g} b_c^{3/2} \frac{\eta_c^{3/2}}{(1 + 2\eta_c)\nu} \quad (8)$$

En dépit du fait que la formule de Colebrook-White (1939) ait été établie en conduite, elle semble être cependant fort intéressante lorsqu'elle est appliquée aux canaux ouverts (Bock, 1966 ; Chow, 1973 ; Sinniger et Hager, 1989). Cette formule exprime le coefficient de résistance  $f$ . A l'état critique, elle s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f_c}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7D_{h,c}} + \frac{2,51}{R_{e,c} \sqrt{f_c}} \right) \quad (9)$$

La relation (9) couvre tout le domaine de diagramme de Moody (1944) et reste applicable dans toute la gamme de rugosités relatives  $0 < \varepsilon/D_{h,c} < 5.10^{-2}$  et pour toute valeur de nombre de Reynolds critique  $R_{e,c} > 2300$ . Elle est en effet exclusivement destinée à l'écoulement turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse en régime critique. Au regard de la forme implicite de la relation (9), il est important de signaler que le nombre de Reynolds critique ne peut être évalué puisque la largeur critique  $b_c$  est le paramètre inconnu du problème. C'est d'ailleurs le paramètre que l'on cherche à déterminer dans la présente étude.

Une autre relation qui servira de base à notre étude est celle de Darcy-Weisbach (1854), relation développée pour les écoulements en conduites circulaires en charges. Elle se présente sous la forme :

$$J = \frac{f}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (10)$$

Dans laquelle  $f$  est le coefficient de frottement ou coefficient de résistance à l'écoulement,  $V$  est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite,  $D$  est le diamètre de la conduite,  $J$  est le gradient de perte de charge correspondant à la pente du canal dans l'écoulement soit uniforme et  $g$  l'accélération de la pesanteur. L'application de la relation (10) est également universelle ; elle joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites et sa généralisation pour les canaux ouverts connaît un grand succès, en remplaçant  $D$  par le diamètre hydraulique  $D_h$ .

En tenant compte des considérations de l'écoulement uniforme en régime critique évoluant dans un canal ouvert rectangulaire, la relation (10) devient :

$$I_c = \frac{f_c}{D_{h,c}} \cdot \frac{V_c^2}{2g} \quad (11)$$

La relation (11) exprime la proportionnalité entre la pente critique  $I_c$  du canal, la vitesse moyenne critique  $v_c$  et le diamètre hydraulique critique  $D_{h,c}$ .

La forme la plus usuelle de la relation (11) est celle que l'on obtient après y avoir insérer l'équation de la continuité, soit :

$$I_c = \frac{f_c}{D_{h,c}} \frac{Q_c^2}{2gA_c^2} \quad (12)$$

Nous pouvons ainsi constater que la pente critique du canal est proportionnelle au carré du débit critique que celle-ci écoule. La relation (12) devient, en tenant compte de la condition de criticité et le paramètre de forme de la section critique :

$$I_c = \frac{f_c}{8} (1 + 2\eta_c) \quad (13)$$

### Calcul explicite de la dimension linéaire

Pour calculer la dimension linéaire critique  $a_c$  représenté par la largeur  $b_c$ , il est nécessaire de disposer les données du problème étudié qui sont ; la profondeur relative normale critique  $\eta_c$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant l'état des parois du canal, la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement et la pente

critique  $I_c$  du canal. On remplace l'expression du diamètre hydraulique critique et le nombre de *Reynolds* critique donnés respectivement par les relations (6) et (8) dans la relation (9) de Colebrook-White, in vient que :

$$\frac{1}{\sqrt{f_c}} = -2 \log \left( \frac{(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8b_c\eta_c} + \frac{2,51(1+2\eta_c)\nu}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c}b_c^{3/2}\eta_c^{3/2}} \right) \quad (14)$$

La relation obtenue est une fonction logarithme décimal sous forme :

$$y = \log x$$

Le logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction  $f(x)=10^x$  et permet de déduire que :  $\forall x \in ]0 ; +\infty [$  et si  $y = \log x$ , alors  $x = 10^y$  ;

Fondée sur cette propriété, la relation précédente (14) permet à écrire:

$$\left( \frac{(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8b_c\eta_c} + \frac{2,51(1+2\eta_c)\nu}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c}b_c^{3/2}\eta_c^{3/2}} \right) = 10^{-\frac{1}{2\sqrt{f_c}}} \quad (15)$$

Nous pouvons déduire de cette dernière relation que:

$$\frac{10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8b_c\eta_c} + \frac{2,51 \times 10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\nu}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c}b_c^{3/2}\eta_c^{3/2}} - 1 = 0 \quad (16)$$

En multipliant l'équation (16) par  $b_c^{3/2}$  et on obtient l'équation suivante:

$$b_c^{3/2} - \frac{10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8\eta_c} b_c^{1/2} + \frac{2,51 \times 10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\nu}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c}\eta_c^{3/2}} = 0 \quad (17)$$

Cette dernière relation est sous la forme :

$$b_c^{3/2} - pb_c^{1/2} - q = 0 \quad (18)$$

Où :

$$p = \frac{10^{\frac{1}{2\sqrt{f_c}}}(1+2\eta_c)\varepsilon}{14,8\eta_c} \quad (19)$$

$$q = \frac{2,51 \cdot 10^2 \frac{1}{\sqrt{f_c}} (1+2\eta_c)v}{4\sqrt{g}\sqrt{f_c} \eta_c^{3/2}} \quad (20)$$

Adoptons le changement de variables :

$$x = b_c^{1/2}$$

Pour les considérations précédentes, nous obtenons l'équation de troisième degré suivante qui est exprimé implicitement par la relation :

$$b_c = \varphi(f_c, \eta_c, \varepsilon, v, g) :$$

$$x^3 - px - q = 0 \quad (21)$$

La relation (21) est une équation de troisième degré en  $x$ , sans terme du second ordre, et la résolution de celle-ci est basée essentiellement sur le théorème de Cardan (1545). Cela consiste à étudier le discriminant  $\Delta$  de cette équation, en particulier son signe, dont le discriminant est :

$$\Delta = q^2 - 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (22)$$

Alors les solutions de l'équation (21) dépendent du signe du nombre réel  $q^2 - 4(p/3)^3$ .

- 1) Si  $q^2 - 4(p/3)^3 \geq 0$ , l'équation (21) admet une racine réelle donnée par la relation suivante :

$$x = \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}(\Delta)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}(\Delta)^{1/2}\right)^{1/3} \quad (23)$$

- 2) Si  $q^2 - 4(p/3)^3 < 0$ . Dans ce cas l'équation (21) admet trois racines cubiques complexes, et au lieu de s'empêtrer dans les racines carrées de nombres complexes, il est possible de mener la résolution de l'équation (21), en se basant sur les changements de variables trigonométriques, selon les étapes suivantes :

- i) En adoptant le changement de variables sous forme trigonométrique  $x = \rho \cos \theta$  ; avec  $\rho$  est un nombre réel et  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Avec ce changement de variables, l'équation (21) serait alors :

$$\rho^3 \cos^3 \theta - p\rho \cos \theta - q = 0 \quad (24)$$

ii) Cette étape vise la linéarisation de l'équation (24) en utilisant la transformation trigonométrique suivante :

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

A l'aide de ce résultat, la forme linéaire de l'équation (24) s'écrit:

$$\rho^3 \left( \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta \right) - p\rho \cos \theta - q = 0$$

On a encore:

$$\frac{1}{4} \rho^3 \cos 3\theta + \left( \frac{3}{4} \rho^3 - p\rho \right) \cos \theta - q = 0 \quad (25)$$

iii) Puisque nous n'avons pas choisi la valeur de  $\rho$ , on peut l'obtenir par l'annulation de la constante de  $\cos \theta$ , de l'équation (25) comme suit :

$$\left( \frac{3}{4} \rho^3 - p\rho \right) = 0 \Rightarrow \rho \left( \frac{3}{4} \rho^2 - p \right) = 0 ;$$

Puisque on a  $\rho \neq 0 \Rightarrow \left( \frac{3}{4} \rho^2 - p \right) = 0 ;$

Ce que revient à déterminer la valeur de  $\rho$  par l'expression suivante :

$$\rho = \sqrt{\frac{4p}{3}} \quad (26)$$

La valeur du paramètre  $p$  donnée par la relation (19) est strictement positive et puisque le discriminant  $\Delta$  est négatif, ceci assure l'existence de  $\rho$ . Et avec ce choix, l'équation (25) se réduit à :

$$\frac{1}{4} \rho^3 \cos 3\theta - q = 0 \quad (27)$$

iv) Il s'agit maintenant de résoudre une simple équation trigonométrique présentée par la relation (27), avec la connaissance des paramètres  $\rho$  et  $q$ .

L'équation (27) permet d'écrire que :

$$\cos 3\theta = \frac{4q}{\rho^3} = \frac{4q}{4p\sqrt{\frac{4p}{3}}} = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} \Leftrightarrow \cos 3\theta = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} ; \quad (28)$$

On sait bien que :

$$\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right)^2 = \frac{27q^2}{4p^3} < 1, \text{ ce que revient à } \Delta < 0.$$

$$27\Delta = 27p^2 - 4q^3, \text{ alors, } \frac{27\Delta}{4p^3} = \frac{27q^2}{4p^3} - 1.$$

La résolution de l'équation considérée (27) se fait par ce changement,  $\beta = 3\theta$ .

Pour résoudre l'équation :  $\cos \beta = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$ , avec  $\left|\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right| \leq 1$ , on utilise le principe d'équivalence:

$$\cos \beta = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} \Leftrightarrow \beta = \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right) + 2k\pi, \text{ où :}$$

$$\beta = -\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right) + 2k\pi \quad (29)$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$ , où  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

On retiendra les racines de signes positifs et en excluant ceux négatifs, car la solution désigne la racine carrée d'une grandeur géométrique  $b_c$ .

### EXEMPLE D'APPLICATION

Pour mettre en évidence ce travail, on considère un écoulement uniforme en régime critique dans un canal de forme rectangulaire, dont les parois internes sont caractérisées par la rugosité absolue  $\varepsilon = 5.10^{-4}\text{m}$  et de la viscosité cinématique du liquide  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ . Le paramètre de forme de la section mouillée critique  $\eta_c = y_c/b_c$  est supposé égal à 0,628, tandis que la pente critique est  $I_c = 4.10^{-3}$ .

On cherche à déterminer la largeur  $b_c$  du canal ainsi que le débit critique  $Q_c$  écoulé.

### Solution

On résout ce problème à l'aide de l'équation implicite (21) qui exprime la relation  $b_c = \varphi(f_c, \eta_c, \varepsilon, \nu, g)$ . Les données nécessaires aux calculs sont :

- 1) Le coefficient de frottement critique  $f_c$ , déterminé par la relation (13) :

$$f_c = \frac{8I_c}{(1 + 2\eta_c)} = \frac{8 \times 4 \cdot 10^{-3}}{1 + 2 \times 0,628} = 0,014184397$$

- 2) Les paramètres  $p$  et  $q$  de l'équation (21) sont respectivement évalués selon les relations (19) et (20) comme suit :

$$p = \frac{10^{\frac{1}{2\sqrt{0,014184397}}}}{14,8} \frac{(1 + 2 \times 0,628)5 \cdot 10^{-4}}{0,628} ; \text{ soit : } p = 1,915586072$$

$$q = \frac{2,51 \times 10^{\frac{1}{2\sqrt{0,014184397}}}}{14,8} \frac{(1 + 2 \times 0,628)10^{-6}}{0,628^{3/2}} ; \text{ soit : } q = 0,120361432$$

L'équation (21) s'écrit :

$$x^3 - 1,915586072 x - 0,120361432 = 0 .$$

- 3) La valeur de discriminant  $\Delta$ , est donnée par la relation (22), soit :  
 $\Delta = -1,026873959$

Le discriminant  $\Delta$  est donc de signe négatif, et l'équation précédente de l'inconnu  $x$  admet trois racines réelles. On retient seulement la racine positive. En tenant compte du changement de variables opéré à l'étape i et avec la considération de l'étape iii, la solution de l'équation du troisième degré en  $x$  est donc :

$$x = \sqrt{\frac{4p}{3}} \cos(\beta/3) ;$$

Calculons l'angle  $\beta$  selon l'étape iv, est tel que :

$$\cos \beta = \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{3}{p}} = \frac{3 \cdot 0,120361432}{2 \cdot 1,915586072} \sqrt{\frac{3}{1,915586072}} = 0,117946953$$

Soit :  $\beta = 1,452574178$  radians ;

La valeur de la racine  $x$  est par suite :

$$x = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,915586072}{3}} \cos(1,452574178/3) = 1,414453955 ;$$

Et on tient compte du changement de variables opéré :

$$b_c = x^2 = (1,414453955)^2 ; \Rightarrow b_c = 2,000679991 \text{ m}$$

Ou bien :  $b_c \approx 2 \text{ m}$ .

Le débit critique  $Q_c$  écoulé est, selon la relation (7) est donné par :

$$Q_c = \sqrt{g} b_c^{5/2} n_c^{3/2} ; \Rightarrow Q_c = \sqrt{9,81} \times 2^{5/2} \times 0,628^{3/2} ;$$

Ou bien :  $Q_c \approx 8,825 \text{ m}^3 / \text{s}$ .

## CONCLUSION

Dans cette étude, on a présenté une approche théorique pour la résolution du problème du dimensionnement d'un canal rectangulaire en écoulement critique. Cette approche est basée sur les deux relations universellement admises de Darcy-Weisbach et de Colebrook-White qui sont appliquées au cas du canal rectangulaire. Ces relations sont valables pour les natures d'écoulement turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse ; ceci s'explique par l'introduction de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. En considérant l'écoulement uniforme en régime critique et en introduisant la condition de criticité, l'objectif a été de proposer une solution explicite, permettant de calculer, avec une précision suffisante la largeur d'un canal rectangulaire, désigné par  $b_c$ . Cette démarche présente une relation acquise, également implicite de forme  $b_c = \varphi(f_c, I_c, \eta_c, \varepsilon, \nu, g)$  et sa résolution se fait à l'aide d'un modèle mathématique présenté par une résolution analytique d'une équation de troisième degré qui conduit à l'expression exacte de la dimension linéaire, et en ayant recours aux fonctions trigonométriques. Cette démarche présente des relations, également explicites permettant la solution directe au problème que pose le calcul de la profondeur critique  $y_c$  et le débit critique  $Q_c$ .

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- ACHOUR B., BEDJAOUI A., (2006). Discussion of Explicit Solutions for Normal Depth Problem, *J. Hydraulic Research, IAHR*, Vol. 44, n°. 5, pp. 715-717.
- ACHOUR B., BEDJAOUI A., (2010). Nouvelle approche pour le dimensionnement des conduites circulaires sous pression, *Courrier du savoir- n° 10*, pp.23-29.
- ACHOUR B., BEDJAOUI A., (2006). Contribution au calcul de la profondeur normale dans un canal rectangulaire, *Lahryss Journal*, n°5, pp.139-147.
- BAKHMETTEF B.A., (1932). *Hydraulics of open channels*, McGraw Hill, New York.
- BOCK J. (1966). Einfluss der Querschnittsform auf die Widerstandsbeiwerte offener Gerinne, *Technischer Bericht 2, Inst. Hydromechanik und Wasserbau, TH Darmstadt*, ed. O. Kirshmer, Darmstadt
- CARLIER M., (1986). *Hydraulique générale et appliquée*, Edition Eyrolles, 61, Bd Saint-Germain Paris 5e, France, 570p.
- CHOW V.T. (1973). *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 680p.
- COLEBROOK C.F. (1939). Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws, *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 11, Issue 4, pp.133-156
- DARCY H. (1854). Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris*, Vol. 38, pp. 1109-1121.
- FRENCH R.H. (1985). *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions.
- JACCON G. (1986). *Manuel d'hydrométrie*, Institut Français de recherche scientifique pour Le développement en coopération, Brasilia.
- HAGER W.H., SCHLEISS, A.J. (2009). *Constructions hydrauliques*, Vol. 15, Presse polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne, 597p.
- HENDERSON F.M. (1966). *Open channel flow*, Mac Millan, Ed., New York.
- U.S. Army Corps of Engineers. (1995). *Hydraulic Reference Manual*, Version 1.0.