



APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS AUX CALCULS DE PROTECTION ANTI-BELIER

APPLICATION OF THE FINITE VOLUME METHOD TO THE COMPUTATION OF WATER HAMMER PROTECTION

AMARA L.¹, BERREKSI A.², ACHOUR B.³

^{1,3} Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface - LARHYSS,
Université de Biskra, B.P. 145, R.P., 07000, Biskra, Algérie

² Laboratoire de Recherche Hydraulique Appliquée et Environnement (LR-HAE),
Université de Bejaia, Algérie

amara.lyes@yahoo.fr

RESUME

Le calcul des écoulements non permanents dans un système hydraulique en charge présente beaucoup de difficultés tant sur le plan pratique que théorique. Dans ce qui suit, une approche numérique aux volumes finis est présentée pour la simulation du phénomène du coup de bélier pour un cas pratique. Après avoir rappelé les équations différentielles hyperboliques gouvernant la propagation des ondes élastiques en charge, les détails de discrétisation du modèle mathématique par le schéma de Godunov sont donnés ainsi que l'intégration du terme source et l'implémentation des conditions aux limites où une approche en maillage excentré est introduite. L'application est faite pour une installation de pompage muni d'un ballon anti-bélier, étranglé à sa base par un dispositif déprimogène. Les résultats sont analysés et comparés à ceux obtenus expérimentalement et aussi numériquement par la méthode des caractéristiques. Le modèle numérique aux volumes finis a alors donné de très bons résultats comparativement à la méthode des caractéristiques et où une congruence avec les mesures expérimentales est appréciable

Mots clés : Coup de bélier, calcul numérique, méthode des volumes finis, schéma de Godunov, ballon anti-bélier.

ABSTRACT

The computation unsteady flow in a pressurized hydraulic system presents many difficulties as well on the practical level as theoretical. In this work, a numerical approach based on the finite volumes method is presented for the simulation of water hammer problems. After having presented the hyperbolic differential equations governing the elastic wave propagation, the discretization details of the mathematical model meaning Godunov scheme are given as well as the integration of the source term and the implementation of the boundary conditions where an approach in excentred grid is introduced. The application treats a case of pumping station protected by a throttled air vessel. The results are analyzed and compared with those obtained in experiments and also numerically by the method of the characteristics. The finite volume numerical model gave very satisfactory results compared to the method of the characteristics and where congruence with experimental measurements is appreciable.

Key words: water hammer, numerical computation, finite volume method, Godunov scheme, air vessel

INTRODUCTION

L'étude des écoulements non permanents en charge, regroupés sous le vocable de « coup de bélier », revêt depuis longtemps une importance capitale pour les Ingénieurs, dans la mesure où l'apparition de ce phénomène peut avoir des conséquences fâcheuses et engendrer de sérieux dommages matériels tels que la rupture de canalisations, désordres dans les installations de pompage ou de turbinage, et parfois même des pertes de vies humaines. Il est donc capital de prévoir et d'étudier ces phénomènes transitoires avec finesse dans l'objectif de réduire leurs effets néfastes par l'utilisation de dispositifs spéciaux et le dimensionnement correct des différents composants des installations hydrauliques.

L'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement à ce problème permet d'écrire le modèle mathématique régissant le phénomène, qui est dans ce cas un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique non linéaire. Face à l'absence d'une solution analytique générale, ce système ne peut être résolu que par voie numérique. A cet effet plusieurs méthodes se présentent, parmi lesquelles on trouve la méthode des caractéristiques (Wylie et Streeter, 1978 ; Chaudhry, 1979 ; Afshar et Rohani,

2008), la méthode des différences finies (Chaudhry et Hussaini, 1985 ; Chaudhry et al. 1990) ou leur combinaison (Wang et Yang, 2014) et récemment, la méthode des volumes finis (Zhao et Ghidaoui, 2004 ; Amara et al., 2013). Cette dernière méthode a particulièrement fait ses preuves dans le domaine de propagation des ondes (LeVeque, 2002) et a reçu un large champ d'application pour les problèmes hyperboliques (Guinot, 2008). A l'inverse des autres méthodes de discrétisation utilisées, la méthode des volumes finis jouit de certaines facultés déterminantes, comme la capture parfaite des chocs et la conservativité. Ces deux particularités découlent de la formulation intégrale utilisée dans la méthode qui reste valide même lorsque des discontinuités apparaissent dans la solution et où les autres techniques aux différences finies tombent à défaut. Cependant, son application aux problèmes du coup de bélier fréquemment trouvés en pratique n'a malheureusement pas reçu d'intérêt.

Dans cet article, nous présentons l'application de la méthode des volumes finis par le schéma de Godunov à l'un des problèmes les plus fréquents en pratique qui est le phénomène transitoire survenant sur une conduite élévatoire protégée par un ballon anti-bélier. Tout d'abord, le modèle mathématique de base gouvernant le problème est rappelé, ensuite nous illustrons la discrétisation des équations du mouvement par le schéma aux volumes finis de Godunov, et où une nouvelle technique d'implémentation des conditions aux limites est introduite suivant un concept de maillage excentré. Nous présentons enfin les résultats de simulation numérique couvrant deux tests portant sur l'analyse de la réponse dynamique du système dans le cas d'un ballon à passage libre sans étranglement à sa base et le cas où le dispositif est muni d'un organe déprimogène. Les résultats obtenus sont alors confrontés et comparés aux mesures expérimentales données par Purcell (1997) ainsi que ceux de la méthode des caractéristiques.

MODELE MATHEMATIQUE

Les équations gouvernant le phénomène du coup de bélier, en écoulement unidirectionnel, sont dérivées en appliquant le principe de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un volume de contrôle. Ces équations décrivent la variation temporelle et axiale des variables du champ d'écoulement en régime instationnaire (Ghidaoui et al., 2005). Pour une section transversale de diamètre constant, ces équations s'écrivent comme suit (Chaudhry, 1979):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \quad (1)$$

Dans lesquelles, Q est le débit, H la charge, S la section transversale de la conduite, a est la célérité des ondes élastiques, $R = \lambda / (2DS)$ la résistance de la conduite, λ coefficient de frottement et D le diamètre de la conduite. Il est à noter que dans ces équations, les termes convectifs sont négligés étant donné leur très faible contribution en pratique (De Almeida et Koelle, 1992). Le système d'équations précédent peut s'écrire sous sa forme vectorielle divergente :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + G = 0 \quad (2)$$

Où le vecteur des variables U et le vecteur flux F ainsi que le terme source G sont donnés comme suit :

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{gS} Q \\ gSH \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ RQ|Q| \end{bmatrix} \quad (3)$$

Le modèle mathématique régissant le problème du coup de bélier est alors un système d'équations aux dérivées partielles hyperbolique à coefficient constant (Chaudhry, 1979). En raison de la présence du terme source non linéaire, une solution générale est impossible. A cet effet, son intégration s'effectue par l'usage de méthodes numériques.

DISCRETISATION NUMERIQUE PAR VOLUMES FINIS

Cette approche repose sur l'écriture des équations du mouvement sous forme intégrale sur un volume de contrôle ou cellule (León, 2007). La discrétisation du domaine de calcul est effectuée en cellules de longueur Δx_i . Le domaine temporelle t est aussi discrétisé en pas de temps Δt . La i ème cellule est centrée au point i et dont les interfaces sont $i - \frac{1}{2}$ et $i + \frac{1}{2}$. Les variables d'état (H, Q) sont alors définies au centres des cellules i et sont moyennées sur

chacune d'elles. Les flux de leurs cotés, sont évalués aux interfaces intercellulaires (figure 1).

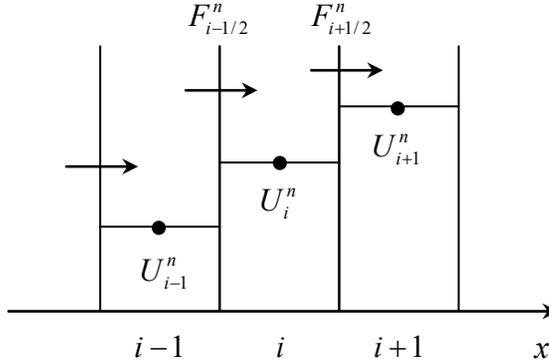


Figure 1 : Discrétisation en volumes finis

Pour la cellule i , l'intégration de l'équation (2), sans terme source, sur le domaine $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ donne alors (Toro et Garcia-Navarro, 2007) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (4)$$

L'introduction du terme source dans la solution est faite par la technique de Runge-Kutta. La détermination de U au temps $n+1$ requiert alors le calcul des flux numériques $F_{i\pm 1/2}^n$ aux interfaces des cellules. Dans l'approche de Godunov, les flux intercellulaires sont évalués en résolvant un problème de Riemann aux interfaces des cellules à chaque pas de temps. La solution du problème de Riemann peut alors s'obtenir par l'usage du solveur approché HLL (Toro, 2009) ou par résolution exacte du dit problème. En faisant usage de la solution exacte (Guinot, 2003), les flux intercellulaires sont donnés par :

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = TU_i^n + YU_{i+1}^n \quad (5)$$

$$U_{i-1/2}^{n+1/2} = TU_{i-1}^n + YU_i^n \quad (6)$$

Avec T et Y matrices de passage s'exprimant par :

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & B \\ B^{-1} & 1 \end{bmatrix} ; \quad Y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -B \\ -B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Où $B = a/gS$ (impédance de la conduite). Ce procédé numérique étant appliqué aux cellules internes du domaine de calcul, un traitement particulier aux frontières doit être appliqué.

CONDITIONS AUX LIMITES

Pour résoudre numériquement les équations du mouvement et déterminer l'état complet de l'écoulement en régime transitoire, il est alors indispensable de compléter la solution aux cellules frontières par l'équation caractéristique de l'organe hydraulique, imposant un régime spécifique pour l'écoulement. Pour une meilleure implémentation des conditions aux frontières, nous utiliserons le concept de maillage "excentré". Cette approche consiste en une discrétisation du domaine en cellules dont l'excentricité est de $\Delta x/2$ par rapport au maillage classique (Guinot, 2003 ; 2008). Par cette technique de maillage, nous pouvons nous apercevoir qu'on aura $N + 1$ cellules et dont la moitié des cellules frontières seront virtuelles (Figure 2).

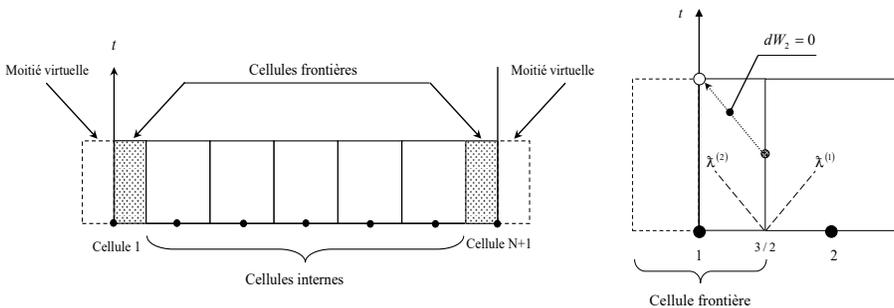


Figure 2 : Maillage excentré du domaine de calcul et cellules virtuelles

Ainsi, on aura la connaissance des variables U_i , centrées en chaque cellule C_i , qui recouperont le dit domaine de calcul. Une telle technique permettra alors une meilleure résolution mathématique des systèmes d'équations imposés par les différents organes hydrauliques. Pour les cellules frontières, la technique que nous proposons ici se scinde en deux parties. En premier lieu, un calcul du flux est réalisé aux interfaces internes (moitié réelle de la cellule d'extrémité) et ceci en résolvant un problème de Riemann en ce lieu (Figure 2). Il résulte alors pour

l'interface 3/2, qui représente la face interne de la cellule amont du domaine, que le flux $F_{3/2}^{n+1/2}$ au temps intermédiaire $t + \Delta t / 2$ se détermine comme une solution exacte au problème de Riemann matérialisé par les discontinuités de contact de célérités $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$. Une fois le vecteur d'écoulement $U_{i+1/2}^{n+1/2}$ connu, on se servira de l'invariant de Riemann W_2 , valide le long de la droite $dx/dt = -a$, pour relier l'état intermédiaire du problème de Riemann et le centre de la cellule frontière au temps $t + \Delta t$ où l'on recherche la solution. Le long de cette droite $dW_2 = 0$, les variables d'écoulement $H(x,t)$ et $Q(x,t)$ sont reliées de la manière suivante :

$$H_1^{n+1} - BQ_1^{n+1} = H_{3/2}^{n+1/2} - BQ_{3/2}^{n+1/2} \quad (8)$$

Nous ferons donc usage de cette équation avec l'équation caractéristique propre à chaque appareil hydraulique pour trouver les inconnues recherchées à la frontière. L'équation complémentaire d'un appareil peut s'écrire sous une forme générale comme une relation fonctionnelle de la manière suivante :

$$\Omega\left(\frac{dU}{dt}, U, t\right) = 0 \quad (9)$$

Avec Ω relation fonctionnelle liant le vecteur $U = [H, Q]^T$ au temps pour les organes imposant une relation différentielle, comme c'est le cas pour les cheminées d'équilibre et les réservoirs anti-bélier (Bergeron, 1949).

STABILITE NUMERIQUE

Pour les équations hyperboliques et dont la méthode de calcul est explicite, il faut remplir la condition de stabilité de Courant, dite règle CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). De manière simple, cette règle stipule que la méthode de calcul utilisée doit pouvoir propager l'onde d'information (signal) de façon correcte du point de vue physique, c'est-à-dire avec la célérité réelle donnée par les valeurs propres de la matrice jacobienne $\partial F(U)/U$. Dans ce cas, le nombre de Courant est défini par :

$$C_r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_p |\lambda^{(p)}| \quad (10)$$

Où $\lambda^{(p)}$ sont les valeurs propres de la matrice jacobienne du flux. Ce nombre doit remplir la condition $C_r \leq 1$ (LeVeque, 2002 ; Guinot, 2008).

INTEGRATION DU TERME SOURCE

Après résolution de la partie homogène du modèle mathématique (problème de Riemann) dans l'approche de Godunov, la méthode utilisée pour l'incorporation du terme source consiste à résoudre le second membre de l'équation (2) comme une équation différentielle ordinaire (Zhao et Guidaoui, 2004):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = G(U) \quad (11)$$

Pour ce faire, il est d'usage de faire appel aux techniques de résolution dites à pas fractionnés, telle que la méthode Runge-Kutta.

RESULTATS ET DISCUSSION

La présente application se donne comme objectif d'étudier le phénomène du coup de bélier survenant sur une conduite élévatoire protégée par un réservoir d'air. Le modèle numérique basé sur la méthode des volumes finis (Godunov) est testé dans une étude de cas réel appuyée par des mesures expérimentales données par Purcell (1997). Celles-ci étant effectuées sur une station de pompage en Irlande protégée par un ballon anti-bélier. Un schéma simplifié de l'installation est alors donné sur la figure (3). Les résultats obtenus sont alors confrontés et comparés en parallèle avec la méthode des caractéristiques (MOC).

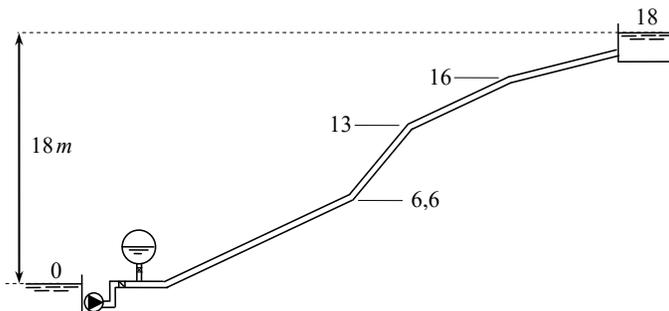


Figure 3 : Schéma simplifié de l'installation de refoulement (Purcell, 1997)

La simulation numérique portera sur l'analyse du régime transitoire naissant par suite de la disjonction du groupe motopompe d'exhaure pour les deux cas suivants :

- ballon anti-bélier sans étranglement à sa base ;
- ballon étranglé en sa base à 80 % au moyen d'une vanne.

Les données techniques de l'installation de pompage sont résumées dans le tableau (1) ci-dessous. Dans ce dernier, sont données les caractéristiques hydrauliques de la conduite de refoulement conjointement avec celles relatives au réservoir anti-bélier.

Tableau 1 : Données de l'installation de pompage (Purcell, 1997)

Conduite de refoulement	
Hauteur géodésique de refoulement (H_g)	18 m
Débit refoulé	0,06 m ³ /s
Diamètre de la conduite	0,3 m
Longueur	1500 m
Coefficient de frottement (λ)	0,025
Célérité des ondes	1 000 m/s
Ballon anti-bélier	
Volume initial d'air (en régime permanent)	0,4 m ³
Section transversale	0,63 m ²
Niveau d'eau au-dessus de l'axe de la pompe	3,5 m
Diamètre de la tubulure de raccordement	0,15 m
Exposant polytropique (γ)	1,35

TEST I : REPOSE TRANSITOIRE SANS ETRANGLEMENT A LA BASE DU BALLON

Cette analyse traite le scénario de déclenchement des pompes alimentant la conduite avec un ballon anti-bélier sans étranglement à sa base, c'est-à-dire l'entrée et sortie de l'eau dans ce dernier s'effectue sans pertes de charge. Sur la figure (4), sont portés les résultats du calcul numérique par le modèle numérique aux volumes finis de Godunov ainsi que les mesures expérimentales

obtenues par Purcell (1997). Ceux-ci traduisent la variation de la pression au droit du réservoir anti-bélier en fonction du temps.

Au vu des résultats reportés sur la figure (4), on peut conclure que ceux obtenus par le modèle numérique aux volumes finis de Godunov sont concordants avec les mesures expérimentales. Toutefois une légère différence est enregistrée entre les deux résultats au niveau des pics en phase de surpression où il apparaît clairement que le calcul numérique surestime les pressions obtenues réellement in-situ. On attribuerait cette différence des maxima des pressions aux conditions thermodynamiques régnant dans le processus d'échange thermique entre la phase liquide et gazeuse dans le ballon d'air. En effet, ceci a été rapporté par certains auteurs à l'image de De Almeida et Koelle (1992) qui ont affirmé par expérimentation que l'exposant polytropique γ varie sensiblement au cours du régime transitoire.

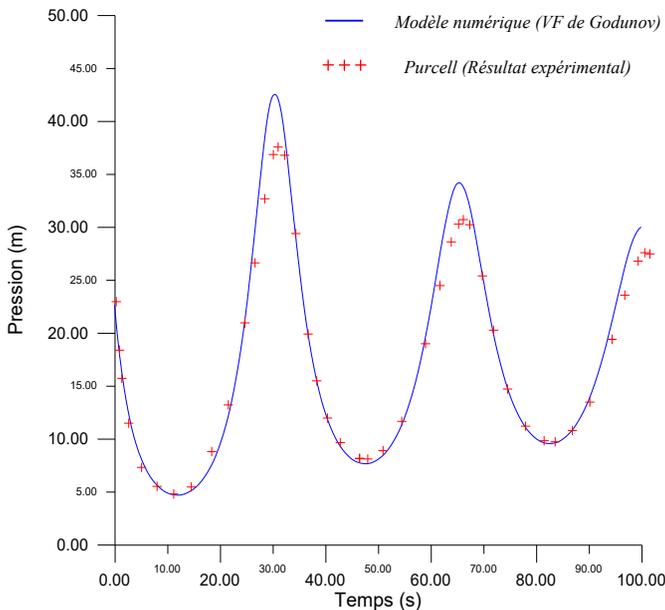


Figure 4 : Variation temporelle de la pression au droit du ballon (sans étranglement)

Ainsi, et dans ce genre d'étude, il est par conséquent difficile de prédire les conditions thermodynamiques (adiabatiques ou isothermiques) du processus. On peut conclure alors que la valeur $\gamma = 1,35$ donnée par Purcell (1997) est très satisfaisante dans la mesure où une connaissance de la valeur réelle s'avère inaccessible.

Tableau 2 : Comparaison des mesures expérimentales et solution numérique (testI)

Méthode de calcul	Pression maximale (m)	Pression minimale (m)	Volume d'air maximum (m ³)	Volume d'air minimum (m ³)
Volumes finis (Godunov)	42,505	4,658	0,804	0,273
Méthode des caractéristiques	42,451	4,672	0,803	0,273
Mesures expérimentales	37,591	4,823	-	-

Sont résumés dans le tableau (2) les résultats de simulation par le modèle aux volumes finis avec le schéma de Godunov avec ceux obtenus par la méthode des caractéristiques (MOC).

Au vu de ces résultats, il apparaît clairement que les deux méthodes aboutissent pratiquement aux mêmes valeurs des pressions et volume d'air. L'erreur relative maximale entre les deux modèles numériques n'excède guère 0,3 %.

TEST II : REPOSE TRANSITOIRE AVEC ETRANGLEMENT A LA BASE DU BALLON

Dans ce test, on simule le comportement de l'installation de pompage en régime transitoire avec l'interposition d'une perte de charge singulière, matérialisée par une vanne d'étranglement entre le ballon et la conduite de refoulement fermée à 80 %. Les pertes de charge engendrées sont ainsi symétriques dont la valeur est $J_S = 30 V_t^2 / 2g$, avec V_t vitesse du fluide dans la tubulure de branchement.

Sur la figure (5) sont alors portées les fluctuations de la pression en fonction du temps enregistrées expérimentalement (Purcell, 1997) et celles obtenues par le modèle numérique aux volumes finis, et ceci au droit du ballon d'air.

Les résultats découlant du calcul numérique par le schéma aux volumes finis de Godunov, permettent de mettre en relief que la simulation reproduit presque fidèlement le comportement transitoire réel du système de pompage mesuré expérimentalement. Durant les premiers instants d'occurrence du phénomène, la superposition des résultats numériques et expérimentaux est parfaite. Cependant, à partir du temps où le premier pic est enregistré, un léger écart est

alors percevable entre le modèle numérique et le résultat expérimental, et ceci à chaque demi-période où un maximum et minimum des pressions sont atteint, sans que la période soit toutefois altérée. Les résultats numériques obtenus pour ce test ainsi que les mesures expérimentales sont regroupés dans le tableau (3).

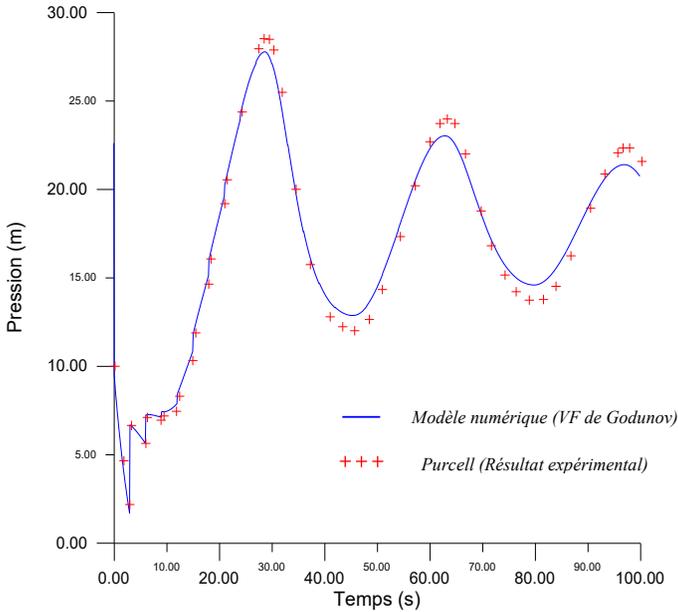


Figure 5 : Variation temporelle de la pression au droit du ballon (avec étranglement)

A l'instar du test examiné précédemment, la méthode des caractéristiques retrace fidèlement les résultats issus du schéma aux volumes finis de Godunov. La différence relative notée entre les deux modèles numériques n'est que de 0,06 % en phase de surpression et 1,27 % en dépression. Les volumes en expansion et compression de l'air dans le ballon sont cependant identiques.

Pour une représentativité du phénomène pour ce cas, sur la figure (6), un report des résultats numériques est alors effectué sur le plan espace-temps. En raison de l'étranglement effectué, une large perturbation est créée sur un linéaire considérable de la conduite durant les premiers instants du phénomène. Les ondes à front raide ainsi provoquées font que l'enveloppe des dépressions cesse d'être linéaire, ce qui peut être dangereux pour le système de pompage.

Tableau 3 : Comparaison des mesures expérimentales et solution numérique (test II)

Méthode de calcul numérique	Pression maximale (m)	Pression minimale (m)	Volume d'air maximum (m3)	Volume d'air minimum (m3)
Volumes finis (Godunov)	27,750	1,656	0,671	0,355
Méthode des caractéristiques	27,732	1,677	0,670	0,356
Mesures expérimentales	28,527	2,189	-	-

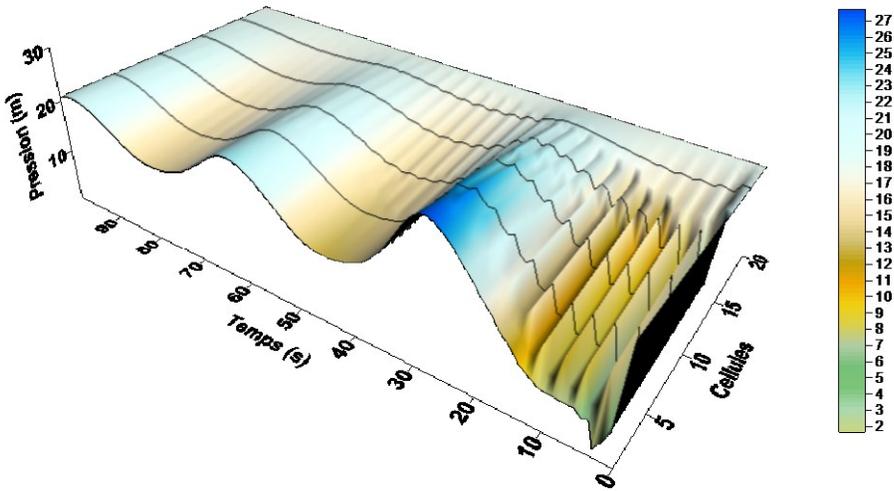


Figure 6 : Vue axonométrique de la variation de la pression dans le plan spatio-temporel

CONCLUSION

Dans ce travail, la méthode des volumes finis a été appliquée pour la résolution de l'un des problèmes pratique de l'ingénierie hydraulique, en l'occurrence le phénomène transitoire du coup de bélier. Le modèle mathématique régissant ce type d'écoulement est un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique. L'intégration de ces équations différentielles n'est possible que

par le biais des méthodes numériques adaptées à ce genre de problèmes. Parmi tant de modèles numériques s'appêtant bien à simuler les propagations d'ondes, la méthode des volumes finis se présente comme étant la plus performante. Ceci revient à son approche très physique et sa formulation mathématique qui jouit de nombreux avantages déterminants tels que la capture des chocs dans les solutions discontinues.

Ceci étant, nous avons appliqué, pour la discrétisation des équations du mouvement, le schéma de Godunov où le calcul des flux numériques a été exécuté en résolvant un problème de *Riemann* localisé aux interfaces intercellulaires. Vu la linéarité des équations (partie homogène), un schéma de premier ordre a été appliqué, ce qui est suffisant pour les problèmes pratiques. Pour le traitement des conditions aux limites du domaine de calcul, nous avons introduit dans ce travail une technique basée sur le concept de « maillage excentré ». Comparativement à la technique usuelle évoquée en littérature, ce concept permet une meilleure manipulation des équations formées par les organes hydrauliques.

L'application traitée a concerné la simulation de la réponse dynamique d'une installation de pompage protégée par un ballon anti-bélier, testée suivant que ce dernier est à passage libre ou à étranglement. La solution numérique obtenue, confrontée aux données expérimentales, a révélée d'appréciables résultats, ainsi qu'avec ceux obtenus par la méthode des caractéristiques. Lorsqu'un étranglement symétrique est appliqué à la base du ballon, le calcul numérique a parfaitement reproduit et capturé le front d'onde raide naissant au droit du ballon en raison de la déformation des ondes élastiques. Du point de vue numérique, ce test met bien en relief la puissance des schémas aux volumes finis à capturer ces discontinuités de contact, très fréquentes lors de variations abruptes du régime d'écoulement.

Pour les cas de système de conduites, où certaines branches imposent un nombre de Courant parfois petit pour satisfaire la stabilité des calculs, il est alors recommandé d'opter pour un schéma de Godunov d'ordre élevé pour pallier au problème de diffusion dans la solution.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AFSHAR M. H., ROHANI M. (2008): "Water hammer simulation by implicit method of characteristic". *International Journal of Pressure vessels and piping*, 85: 851-859.

- AMARA, L., ACHOUR, B., BERREKSI, A. (2013): "Approche numérique aux volumes finis pour le calcul de la réponse dynamique des cheminées d'équilibre". *LARHYSS Journal*, 14 : 7-19.
- BERGERON, L. (1949) : "Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité. Méthode graphique générale". Dunod, Paris.
- CHAUDHRY, M. H. (1979) : "Applied hydraulic transients". Van Nostrand.
- CHAUDHRY, M. H., BHALLAMUDI, S.M., MARTIN, C.S., NAGHASH, M. (1990): "Analysis of Transient Pressures in Bubbly, Homogeneous, Gas-Liquid Mixtures". *Journal of Fluids Engineering*, ASME 112: 225–231.
- CHAUDHRY, M. H., HUSSAINI, M. Y. (1985): "Second-Order Accurate Explicit Finite-Difference Schemes for Water Hammer Analysis". *Journal of Fluids Engineering*, ASME 107: 523–529.
- DE ALMEIDA, B., KOELLE, E. (1992) : "Fluid transients in pipe networks". Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, Glasgow.
- GHIDAOU, M. S., ZHAO, M., MCLNNIS, D. A., AXWORTH, D. H. (2005): "A review of Water hammer Theory and Practice". *Transactions of the ASME* 58: 49-76.
- GUINOT, V. (2003): "Godunov-type schemes: an introduction for engineers". Elsevier Science B.V.
- GUINOT, V. (2008): "Wave Propagation in Fluids : Models and numerical techniques". ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.
- LEÓN S. A. (2007): "Improved modeling of unsteady free surface, pressurized and mixed flows in storm-sewer systems". Thèse de Doctorat de Philosophie (Ph.D) en Génie civil, Université d'Illinois.
- LEVEQUE, J. (2002): "Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems". Cambridge University Press, Cambridge.
- PURCELL, P. J. (1997): "Case Study of Check-Valve Slam in Rising Main Protected by Air Vessel". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 123(12): 1166-1168.
- TORO ELEUTERIO, F., GARCIA-NAVARRO, P. (2007): "Godunov-type methods for free-surface shallow flows: A review". *Journal of Hydraulic Research*, 45(6): 736-751.
- TORO, E. F. (2009): "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Pratical Introduction". Troisième édition, Springer-Verlag.
- WANG, C. ET YANG, J.D. 2014: "Water Hammer Simulation Using Explicit–Implicit Coupling Methods". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, (11) : 1-11.
- WYLIE, E. B., STREETER, V. L. (1978): "Fluid transients". MacGraw-Hill.
- ZHAO, M., GHIDAOU, M. S. (2004): "Godunov-type solutions for water hammer flows". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE 130(4): 341-348.