



## CONTRIBUTION A L'ETUDE NUMERIQUE DE L'ÉCOULEMENT SUBSONIQUE ET TRANSSONIQUE AUTOUR D'UN PROFIL D'AILE MINCE TYPE NACA 0006

**BOUHELAL A.<sup>1</sup>, BRIMA A.<sup>2</sup>, DERFOUF C.E.<sup>2</sup>, MOUMMI N.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Doctorant, Ecole Polytechnique El-Harrach-Algérie

<sup>2</sup>Laboratoire de Génie Mécanique, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie

hamidgangboy@gmail.com

### ABSTRACT

The work allows to study theoretically (numerical method + solver Fluent) the flow around the profile. Our attention will be principally taken on the description of the parallel and homogeneous flow. In the same context and in the case of the potential flow, we will take the perturbed function caused by the presence of the profile. The mathematical formulation of the problem gives for different Mach numbers several forms of differential equations as (linear or non linear). The solution found for each Mach number interval allows a good understanding of the flow behaviors inside the studied field.

**Keywords:** Numerical study, Small perturbation theory, Thin obstacle, Mach number.

### RESUME

Le travail consiste à étudier théoriquement l'écoulement via un obstacle mince (méthode numérique + solveur Fluent). Notre attention sera principalement portée sur le problème de la description d'un écoulement parallèle et homogène. Dans ce contexte et pour le cas d'un écoulement irrotationnel, un potentiel perturbé dû à la présence de l'obstacle sera introduit. La formulation mathématique du problème conduira pour différents nombres de Mach à des équations différentielles (linéaires ou non linéaires) à résoudre. La solution

trouvée pour chaque intervalle de nombre de Mach permettra de bien comprendre le comportement de l'écoulement dans le domaine d'étude choisi.

**Mots clés:** Etude numérique, Théorie de petites perturbations, Obstacle mince, Nombre de Mach.

## INTRODUCTION

Plusieurs travaux de recherches ont été réalisés pour modéliser l'écoulement autour des profils. Pour cela, un nombre important d'expériences dans le domaine ont été réalisées et confrontées aux méthodes numériques. (Ogana, 1989), a proposé une méthode basée sur l'équation de petite perturbation transsonique à deux dimensions, (Hamedi et al., 1992), ont trouvé une nouvelle approche pour les écoulements stationnaires parfaits supersonique et hypersonique autour d'un profil mince et pointu-nez à faible angle d'attaque. Une large gamme de méthodes mathématiques a été développée afin de s'approcher de la réalité de l'écoulement et de fournir le maximum d'informations qui peuvent se produire. (Yates, 1993) a développé une équation intégrale pour la résolution des écoulements subsoniques, transsoniques et supersoniques pour les cas stables et non stables.

## HYPOTHESES

L'écoulement est bidimensionnel dans le plan (xy). Le fluide est idéal (non visqueux), compressible. L'écoulement est potentiel (irrotationnel). L'écoulement est stationnaire  $\partial/\partial t = 0$ . Les propriétés physiques sont supposées constantes.

## FORMULATION MATHÉMATIQUE

Les équations d'Euler régissent les écoulements de gaz parfaits adiabatiques (dans lesquels on néglige les effets de viscosité et de transfert de chaleur). Ainsi, pour un écoulement Eulérien bidimensionnel, dont les forces de pesanteur sont négligeables, les équations à résoudre, exprimées dans un repère cartésien (ox, oy), prennent la forme suivante (Brima, 2012 ; Cherrad, 2012 ; Chaussedents, 2011).

### Equation de continuité

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} + \nabla(\dots\vec{q}) = 0 \quad (1)$$

### Equation de quantité de mouvement

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \frac{\partial\vec{q}}{\partial t} + \vec{q}\nabla\vec{q} = -\frac{1}{\dots}\vec{\nabla}P + \vec{f} \quad (2)$$

On néglige les forces massiques ( $\vec{f} = \vec{0}$ ), et après l'application des hypothèses précédentes, on obtient :

$$\vec{q}\nabla\vec{q} = -\frac{1}{\dots}\vec{\nabla}P \quad (3)$$

### Equation d'énergie

$$\frac{DS}{Dt} = \vec{q}\vec{\nabla}S = 0 \quad (4)$$

Equation d'état thermodynamique s'écrit (Louis, 1997; Benhamouda, 2008; Ryming, 2004):

$$\vec{\nabla}P = \left(\frac{\partial P}{\partial \dots}\right)_s \vec{\nabla}\dots + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{\dots} \vec{\nabla}S \quad (5)$$

Cette dernière équation après multiplication scalaire par  $\vec{q}$  et dans le cas d'un écoulement isentropique ( $\vec{\nabla}S = \vec{0}$ ), prendra la forme suivante :

$$\vec{q}\cdot\vec{\nabla}P = C^2 \cdot \vec{q}\vec{\nabla}\dots \quad (6)$$

On multiplie les équations précédentes par des paramètres intermédiaires on obtient le système d'équations suivantes:

$$\begin{cases} c^2 \vec{\nabla} \vec{q} + \frac{\vec{q}}{\dots} c^2 \vec{\nabla} \dots = 0 \\ -\vec{q} [\vec{q} \vec{\nabla} \vec{q}] - \frac{\vec{q}}{\dots} \vec{\nabla} P = 0 \\ \frac{\vec{q}}{\dots} \vec{\nabla} P - \frac{c^2}{\dots} \vec{q} \vec{\nabla} \dots = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Par addition des équations du système (7), on aura (Lallemand, 1997; Cengel et al., 2009):

$$-\vec{q} [\vec{q} \vec{\nabla} \vec{q}] + c^2 \vec{\nabla} \vec{q} = 0 \quad (8)$$

En coordonnées cartésiennes, cette équation devient (Ryning, 2004; Paraschivoiu et al., 2003; Buffat, 2007):

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (c^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} - uv \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

### Equation du potentiel de vitesse

Si l'écoulement est irrotationnel, il existe un potentiel de vitesse  $W$  tel que (Cengel et al., 2009; Paraschivoiu, 1998; Chaussedent, 2011):

$$\vec{q} = \vec{\nabla} W \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial W}{\partial x} \\ v = \frac{\partial W}{\partial y} \end{cases} \quad (10)$$

On peut écrire l'équation (9) en fonction de  $w$  comme suit :

$$\left[ c^2 - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left[ c^2 - \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0 \quad (11)$$

A partir de l'équation d'énergie on peut écrire  $c^2$  en fonction de  $w$  :

$$c^2 = c_\infty^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left[ U_\infty^2 - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (12)$$

## THEORIE DES PETITES PERTURBATIONS

Si un écoulement homogène et parallèle de vitesse  $U_\infty$  est orienté dans la direction  $(\vec{i})$  d'un repère cartésien, le potentiel total  $w$  s'écrit (Brima, 2012; Fletcher, 1988; Cengel et al., 2009; Cherrad, 2012; Leishman, 2006; Brun, 1977; Khene, 2000):

$$w = U_\infty x + \{ \quad (13)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} u = \frac{\partial w}{\partial x} = U_\infty + \frac{\partial \phi}{\partial x} = U_\infty + u_k \\ v = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_k \end{cases} \quad (14)$$

Les vitesses de perturbation  $u_k = u - U_\infty$  et  $v_k = v$  associées au potentiel  $\phi$  sont supposées être petites par rapport à  $U_\infty$ , de telle sorte que :

$$\frac{u_k}{U_\infty} = \frac{u - U_\infty}{U_\infty} \ll 1, \quad \frac{v_k}{U_\infty} \ll 1 \quad (15)$$

En introduisant les équations (12) et (13) dans l'équation (11), on néglige les termes d'ordre supérieur, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ c_\infty^2 - (x-1)U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} - U_\infty^2 - 2U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \\ & \left[ c_\infty^2 - (x-1)U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2U_\infty \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Après division par  $C_\infty^2$  et après réarrangement de l'équation (16), il découle :

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= M_\infty^2 (x-1) \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \\ M_\infty^2 (x-1) \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &+ 2M_\infty^2 \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (17)$$

Dans le cas d'un écoulement subsonique, l'équation (17) s'écrit comme :

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (18)$$

Dans le cas d'un écoulement transsonique, l'équation (17) se simplifie en :

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = M_\infty^2 (x - 1) \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (19)$$

### Ecriture adimensionnelle

On définit les variables adimensionnelles suivantes:

$$\xi^* = \frac{\xi}{U_\infty L}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}$$

Les équations (18) et (19) deviennent respectivement :

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial Y^2} = 0 \quad (20)$$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial Y^2} = M_\infty^2 (X - 1) \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \xi^*}{\partial X} \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial X^2} \quad (21)$$

La discrétisation des équations (20) et (21) par la méthode des différences finies basée sur un schéma centré sont respectivement (Fortin, 2007; Allaire, 2005) :

$$\xi_{i+1,j}^* + \xi_{i-1,j}^* + A \xi_{i,j+1}^* + A \xi_{i,j-1}^* - 2(A+1) \xi_{i,j}^* = 0 \quad (22)$$

$$\xi_{i+1,j}^* + \xi_{i-1,j}^* + B \xi_{i,j+1}^* + B \xi_{i,j-1}^* - 2(B+1) \xi_{i,j}^* - C \xi_{i+1,j}^{*2} + 2C \xi_{i,j}^* \xi_{i+1,j}^* - 2C \xi_{i,j}^* \xi_{i-1,j}^* + C \xi_{i-1,j}^{*2} = 0 \quad (23)$$

Avec les constantes A, B et C sont données par les expressions suivantes:

$$A = B = \left(\frac{h}{l}\right)^2 (1 - M_\infty^2)^{-1}; \quad C = 2hM_\infty^2 (x + 1) (1 - M_\infty^2)^{-1}$$

Les tableaux (1) et (2) présentent les valeurs des constantes A, B et C utilisées dans notre programme pour chaque régime d'écoulement :

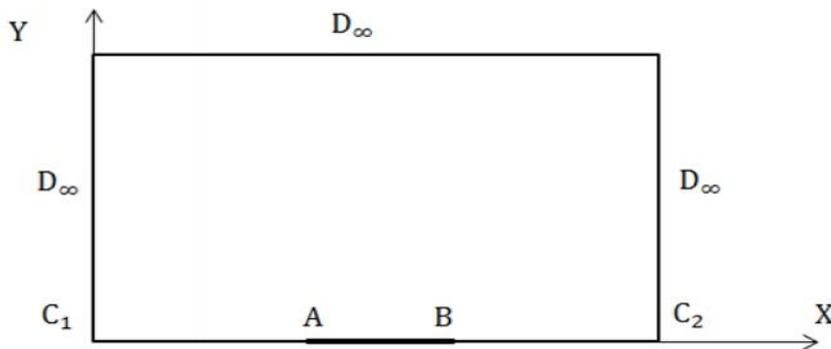
**Tableau 1 :** Valeurs de la constante A pour le cas subsonique.

$M_\infty$	A
0.1	1.01010101
0.2	1.041666667
0.279	1.08441169
0.3	1.098901099
0.4	1.19047619
0.5	1.333333333
0.6	1.5625

**Tableau 2:** Valeurs des constantes B et C pour le cas transsonique.

$M_\infty$	B	C
0.7	1.96078	11.5294
0.8	2.77778	21.3333
0.87	4.11353	37.3624
0.9	5.26316	51.1579

**Les conditions aux limites**



- Sur  $D_\infty$  ;  $\psi^*(x, y) = 0$
- Sur  $[C_1, A]$  et  $[B, C_2]$  ;  $\frac{\partial \psi^*}{\partial y} = 0$ , à cause de la symétrie.
- Sur la ligne du profil  $[A, B]$  :  $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$  (Brima, 2012; Paraschivoiu, 1998; Zeytounian, 1991).

Le tronçon AB représente le profil d'aile mince.

## RESULTATS ET DISCUSSIONS

Après avoir résolu les équations différentielles gouvernantes du problème, dont l'inconnue est la perturbation du potentiel, on a remarqué que la variation suivant l'axe de symétrie ( $Y=0$ ) tracée sur la figure (Fig.1) est une fonction croissante négativement dans la partie amont du bord d'attaque et croissante positivement sur le profil, puis elle décroît juste après le bord de fuite pour s'amortir et tendre vers zéro loin du profil. Cette loi de variation se redresse progressivement pour s'annuler en s'éloignant vers l'infini dans le sens des ordonnées positives ; ( $Y=0.2$ ,  $Y=0.5$ ,  $Y=1$  et  $Y=2.4$ ), ceci traduit l'effet remarqué de l'obstacle sur la valeur de la fonction du potentiel, autrement dit la perturbation se sent près du profil. On remarque aussi que, proche du profil, la perturbation augmente pour atteindre sa valeur maximale et ce pour différentes valeurs du nombre de Mach. Par contre, l'effet du profil sur la perturbation diminue en s'éloignant du profil. Pour mieux comprendre comment la ligne de courant épouse la forme du profil mince symétrique (NACA 0006), il est préférable de tracer la composante axiale ( $U$ ) du vecteur vitesse. D'après la figure (Fig.2), on peut dire que la vitesse axiale prend une forme croissante positive en allant juste après du bord d'attaque vers l'épaisseur maximale, et juste après l'épaisseur maximale, la vitesse ( $U$ ) commence à décroître vers le bord de fuite au-delà duquel cette vitesse commence à se stabiliser. Ce comportement cinématique traduit la décélération du mouvement dans cette zone. La courbe (Fig.3) montre la variation du nombre de Mach local en fonction de la variable ( $X$ ). On remarque que la loi de variation de ce nombre adimensionnel suit presque la même loi de variation de la vitesse axiale ( $U$ ) de l'écoulement. On peut dire aussi que la variation du nombre de Mach, suivant la direction de l'écoulement peut atteindre la valeur transitoire pour passer de régime subsonique incompressible au régime subsonique compressible pour le nombre de Mach ( $M_\infty = 0,279$ ). On remarque aussi que la valeur du nombre de Mach ( $M_\infty = 0,870$ ) est une valeur critique de variation du régime d'écoulement transsonique au régime sonique. La figure (Fig.4), présente la variation du coefficient de la pression sur l'extrados (qui traduit le rapport entre la variation de pression statique et la pression dynamique) qui passe de la valeur maximale au voisinage du bord d'attaque à une valeur minimale près de l'épaisseur relative maximale ; puis elle croît d'une manière continue jusqu'au bord de fuite : ceci explique l'influence du champ de vitesse sur le nombre adimensionnel de pression entrant en jeu. Finalement, la courbe (Fig.5), présente la variation de la température en fonction de ( $X$ ) avant le bord d'attaque. On constate que la loi de variation de température sur la ligne ( $Y=0$ )

est plus remarquable, ce qui explique le choc des particules causé par le point d'arrêt.

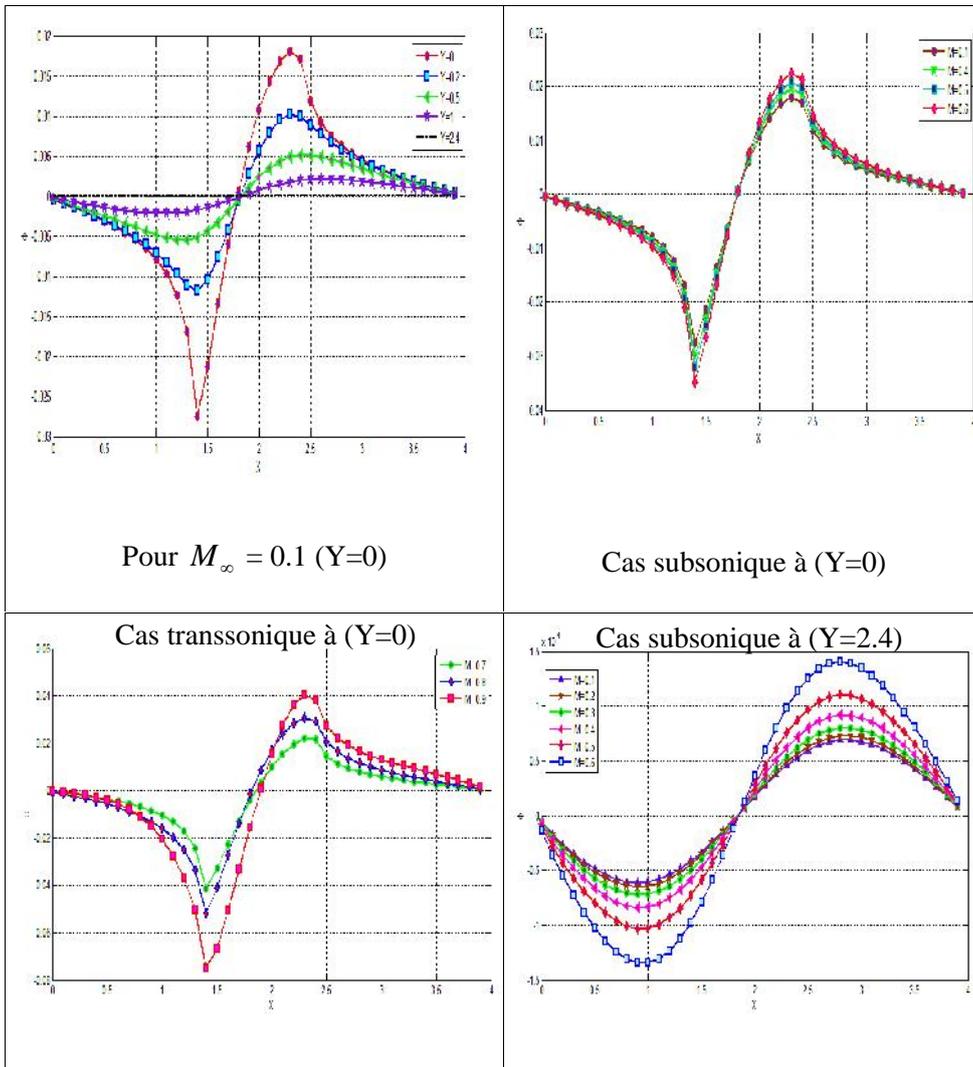
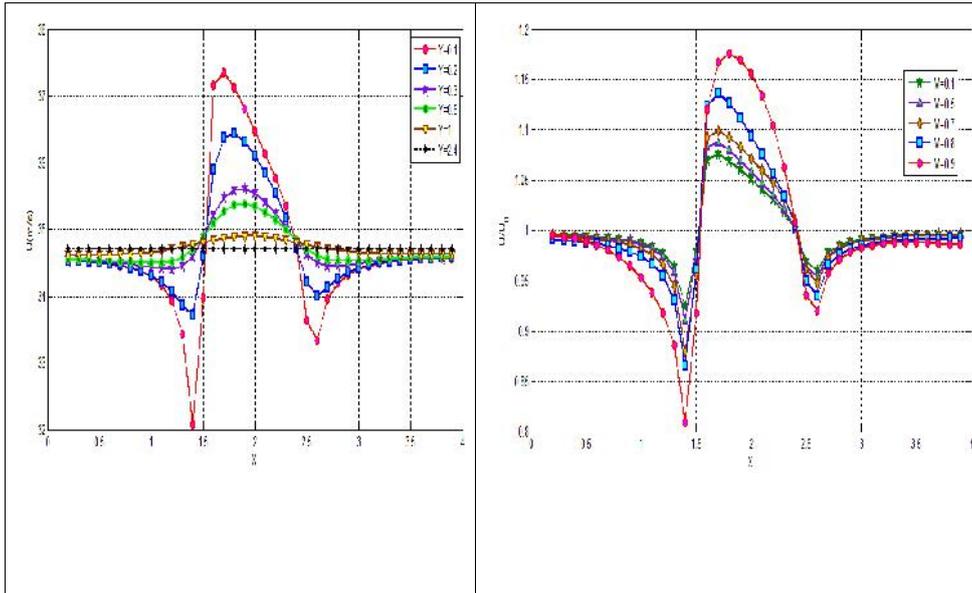


Figure 1: Variation de perturbation en fonction de X



**Figure 2:** Variation de la vitesse axiale en fonction de X

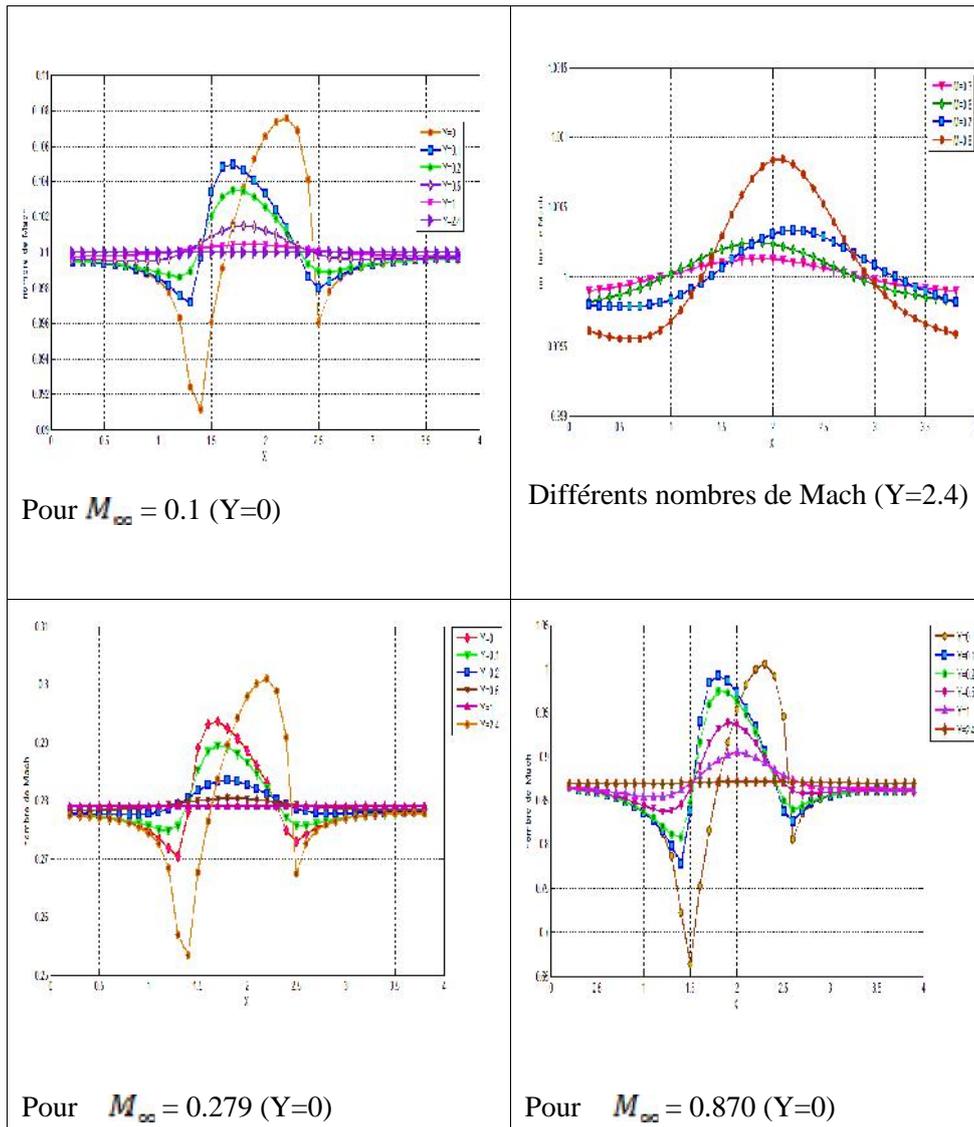
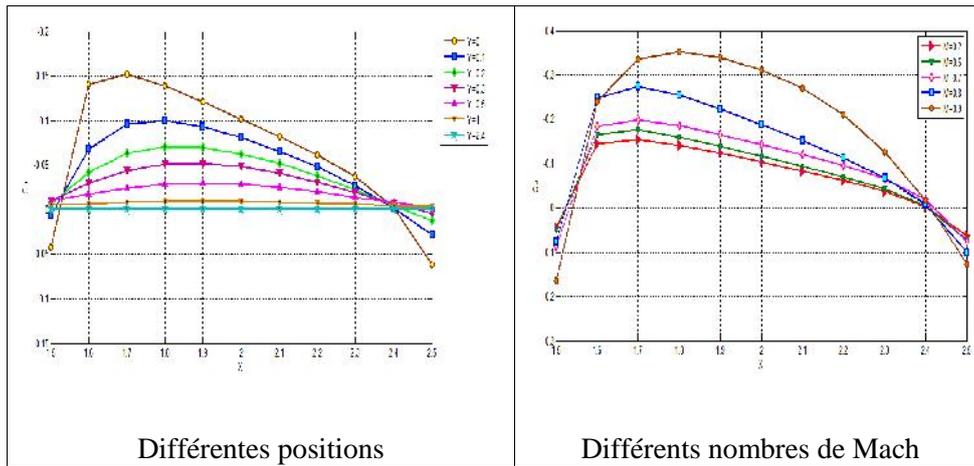
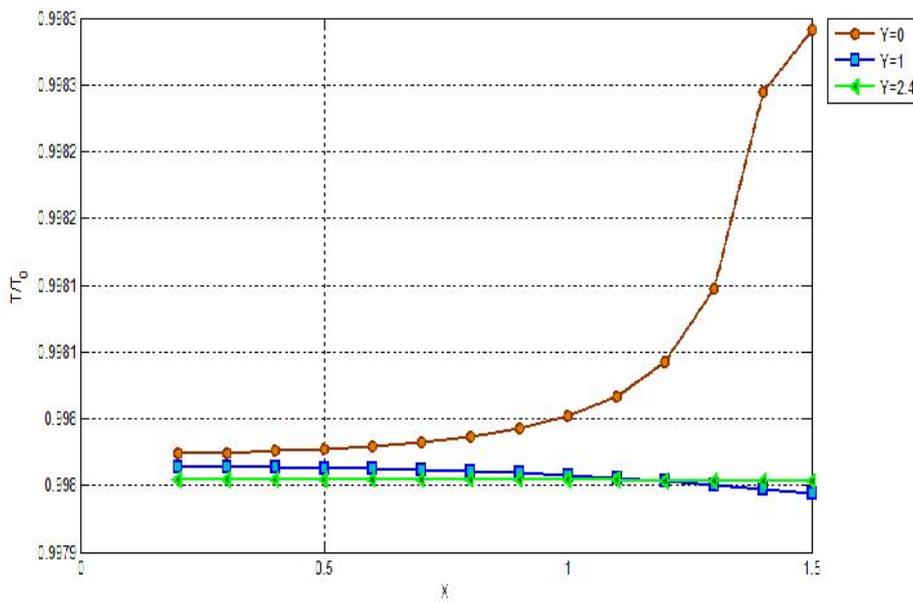


Figure 3: Variation du nombre de Mach local en fonction de X



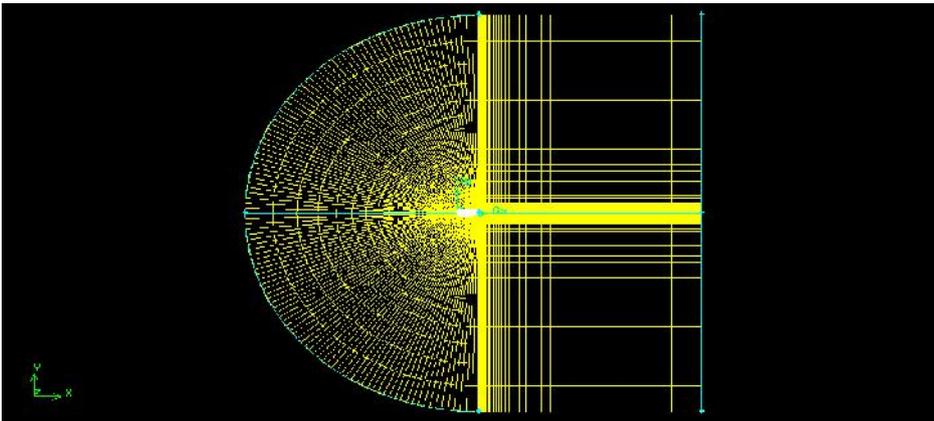
**Figure 4:** Variation du coefficient de pression en fonction de X



**Figure 5:** Variation de la température en amont du bord d'attaque  $M_\infty = 0,1$

## VALIDATION DES RESULTATS

Notre programme en fortran sous Windows a pris en considération un domaine d'étude de 1000 équations à 1000 inconnues avec un maillage carré (pas =0.1). Les résultats trouvés reflètent bien le sens physique du phénomène. La figure (Fig.7) montre bien que les lois de variations tracées à partir de nos résultats sont en bon accord dans leur ensemble avec celles tracées en utilisant le solveur « Fluent v 6.3.26 ». De point de vue numérique, une légère différence entre les valeurs des différentes caractéristiques a été remarquée entre nos résultats et celles calculées par le solveur, ce qui explique à notre avis l'effet du raffinement du maillage forme C représenté sur la figure (Fig.6) (pas de solveurs = 0.001 = 1 % taille ou pas choisi).



**Figure 6:** Représentation du maillage en C complet

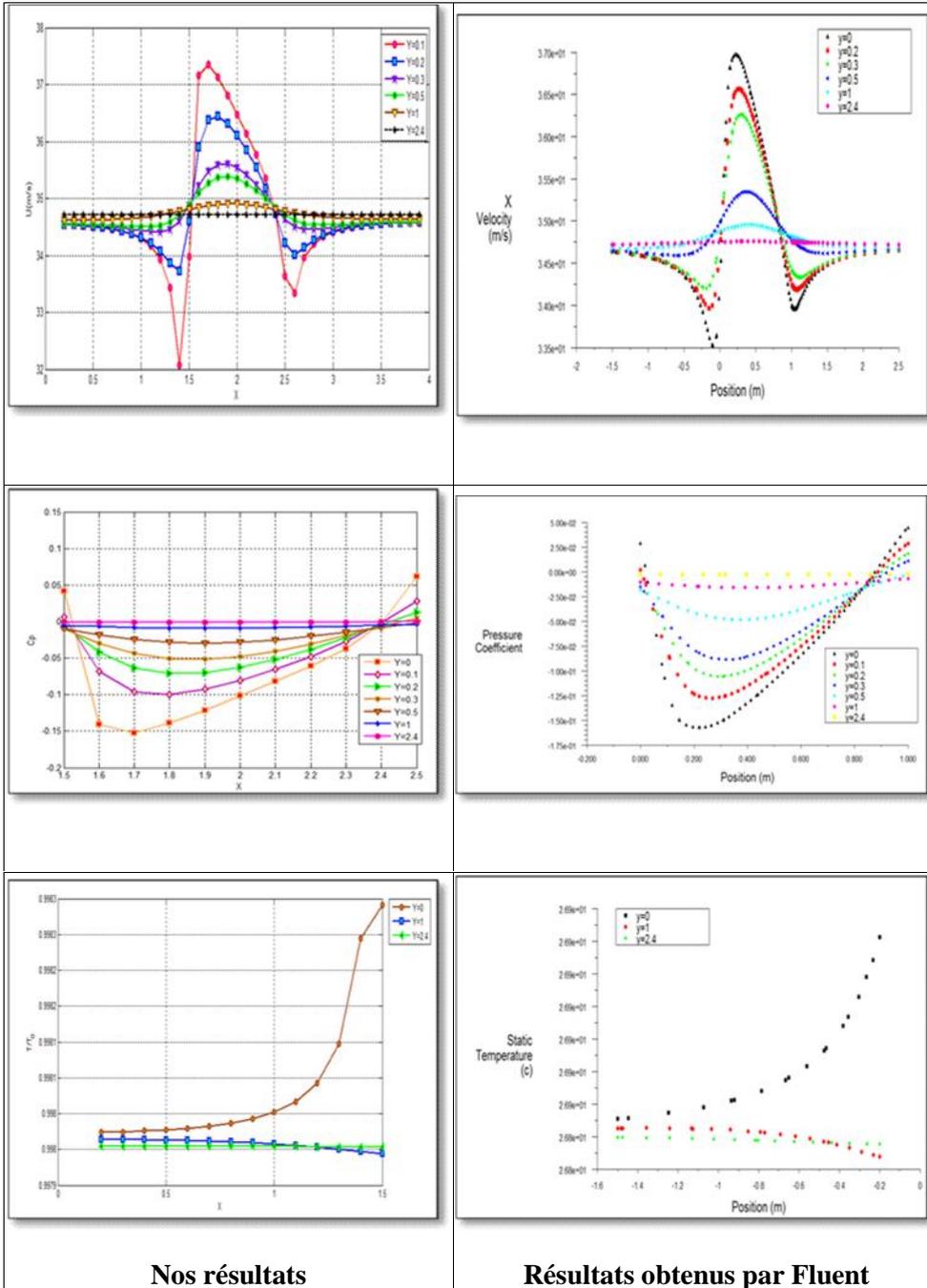


Figure 7: Comparaison des résultats numériques obtenus

## **CONCLUSION**

Dans ce travail, on a étudié numériquement l'écoulement potentiel, bidimensionnel et stationnaire autour d'un obstacle mince profilé pour les différents types d'écoulements (subsonique incompressible, subsonique compressible et transsonique). Le premier travail effectué est de formuler mathématiquement le problème, en utilisant les équations de base pour un écoulement irrotationnel permanent, pour trouver une seule équation dans chaque cas d'écoulement. On a remarqué que l'équation est linéaire pour le cas de l'écoulement subsonique, et non linéaire pour le cas de l'écoulement transsonique. Nous avons fixé un domaine d'étude qui présente une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, pour cela on a effectué le traitement numérique seulement sur l'Extrados. Puis on a discrétisé les équations gouvernantes du problème par la méthode des différences finies basée sur un schéma centré, pour les transformer en un système d'équations algébriques (linéaire ou non linéaire) dont les inconnues sont les perturbations du potentiel des vitesses produit par la forme du profil. La résolution numérique de ce système d'équations algébriques fournit les caractéristiques de l'écoulement autour de l'obstacle choisi à chaque point du domaine de calcul et donne le maximum d'informations sur le comportement de fluide en écoulement. Nous nous sommes principalement intéressés par la distribution de la perturbation autour du profil dans chaque cas de l'écoulement. L'étude a permis aussi de voir l'influence du nombre de Mach ( $M_\infty$ ) sur la perturbation. Enfin, et après la comparaison des résultats obtenus par notre propre code de calcul avec les résultats trouvés par le solveur « Fluent v 6.3.26 », on peut dire que nos résultats sont en concordance avec ceux trouvés par le solveur.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- ALLAIRE G. (2005). Analyse numérique et optimisation, éditions de l'école polytechnique, Paris.
- BENHAMOUDA R.(2008). Notions de mécanique des fluides, Centre de publication universitaire, Tunis.
- BRIMA A. (2012). Mécanique des fluides et Aérodynamique, cours de Mastère, Département de génie Mécanique, Université de Biskra.
- BRUN R. (1977). Manuel du mécanicien et du thermicien, éditions techip, Paris
- BUFFAT M. (2007). Cours de dynamique des gaz, université Claude Bernard, Lyon1, France.
- CAUVIN D. (1990). Aérodynamique, Mécanique du vol, Université Aéronautique Jean Mermoz, France.

- CENGEL Y, CIMBALA J. (2009). Mécanique des fluides : Ecoulements externes, Université de Québec.
- CHAUSSEMENT S.(2011).Statique et dynamique des fluides, université d'Angers, France.
- CHERRAD A.E. (2012). Etude de l'écoulement transsonique autour d'un obstacle, mémoire de magister, Université de Batna.
- FLETCHER C.A.J. (1988). Computational techniques for fluid dynamics, Vol.1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- FORTIN A.(2007). Analyse numérique pour ingénieurs, éditions de l'école polytechnique de Montréal.
- HAMEDI T.H., ABDULFATAH A.S. (1992). Supersonic flow past pointed-nose thin airfoils, Journal of acta astronautica, Vol.26, N°5, 317-323.
- KHENE S. (2000). Mécanique des fluides, Publications de l'université Badji Mokhtar, Annaba.
- LALLEMAND A. (1997). Ecoulements monodimensionnels des fluides compressibles, Université de Lyon, France.
- LEISHMAN J.G. (2006). Principles of helicopter aerodynamics, Presses Université de Cambridge.
- LOUIS P. (1997). Mécanique des fluides à masse volumique variable, presse de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris.
- OGANA W.(1989). Transonic integro-differential and integral equation with artificial, Engineering analysis with boundary elements, Vol.6, N° 3.
- PARASCHIVOIU I., MICHEL P., ROBILLARD L., VASSEUR P. (2003). Mécanique des fluides, Presses Internationales Polytechniques, Ecole de Montreal, Canada.
- PARASCHIVOIU I. (1998). Aérodynamique subsonique, Editions de l'Ecole Polytechnique de Montreal (Québec), Canada.
- RYHMING I. (2004). Dynamique des fluides, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- YATES E.C. (1993). Integral-équation methods in steady and unsteady subsonic, transonic and supersonic aerodynamics for interdisciplinary design, engineering analysis with boundary elements, Vol.12, 175-184.
- ZEYTOUNIAN R.K. (1991). Mécanique des fluides fondamentale, Université de Lille, France.