



MODELISATION D'UN ECOULEMENT DIPHASIQUE ERODANT DANS UN MILIEU POREUX CAS DE LA SUFFUSION

CHETTI A., HAZZAB A., KORICHI K.

Laboratoire de modélisation et méthodes de calcul
Université Dr. Moulay Tahar de Saida BP 138 Ennasr Saida 20002 Algérie

RESUME

L'érosion interne est l'une des causes principales de rupture des ouvrages hydrauliques. Elle peut être développée sous forme de plusieurs phénomènes parmi lesquels on cite la suffusion. Les sols les plus vulnérables à la suffusion sont les sols à granulométrie étalée. Dans ces milieux, les éléments fins sans cohésion sont transportés en premier, le sol se trouve par la suite appauvrie en fines et devient plus perméable. Le processus peut se poursuivre impunément pendant des années, ou même des dizaines d'années, jusqu'à laisser place à un sol squelettique très appauvrie en fines qui risque de s'effondrer à tout moment. En se basant sur une loi d'écoulement type *Darcy*, une loi d'érosion de *Papamichos* et une loi d'évolution de la viscosité de fluide (relation d'*Einstein*), on propose d'étudier une approche de modélisation numérique de la suffusion. La résolution numérique du problème est réalisée par la méthode des différences finies. L'échantillon étudié est discrétisé en un ensemble de couches élémentaires. Le schéma explicite décentré est appliqué pour la discrétisation. A travers la modélisation numérique, on étudie l'évolution instantanée de la concentration du solide fluidisé et de la masse des particules érodées. L'influence de la variation des paramètres mécaniques et hydrauliques du sol sur cette évolution tel que le coefficient d'érosion et la porosité maximale est examinée.

Les résultats de simulation indiquent que le phénomène de suffusion est fortement lié aux paramètres mécaniques et hydrauliques tels que le coefficient d'érosion et la porosité finale.

Mots clés : Erosion interne, suffusion, simulation, loi de *Darcy*, différences finies, concentration, particules érodées.

ABSTRACT

Internal erosion is one of the main causes rupture of hydraulic works. It can be developed under form of two basic phenomena: piping erosion and suffusion, they differ in their geometrical and Hydraulic boundary conditions. The risk of rupture is consequently different. The first phenomenon is the most dangerous and fastest, if it is not immediately stopped; it leads (drove) very quickly to the failure. In the second, the permeability of the medium is slowly modified and after an uninterrupted phase of development, there (can) may be rupture.

Relying on a *Darcy* flow and law erosion of *Papamichos* and a law of evolution of the viscosity fluid (*Einstein* relation), we propose a first approach for modeling the suffusion by the description of the evolution in time of the average porosity of the matrix solid porous medium, the concentration of fluid particles eroded, as well as the evolution of the mass of particles eroded, while highlighting the influence of changes in hydraulic and mechanical parameters of the ground on this development as that the coefficient of erosion, the maximum porosity...etc. The numerical solution of the problem is done by the method of finite differences. The sample is discretized into a set of elementary layers. The basic layer is referenced by the index *j* and the time by exposing *i*. For the discretization, we adopted the explicit scheme decentered. The simulation results indicate that the suffusion phenomenon is strongly related to hydraulic and mechanical parameters of soil like the erosion coefficient and the final porosity.

Keywords: Internal erosion, suffusion, simulation, Darcy law, finite difference, concentration, eroded particle.

INTRODUCTION

L'érosion interne est l'une des principales causes de rupture d'ouvrages hydrauliques. Dans ce contexte, on relève à travers l'histoire des barrages des accidents qui témoignent de la violence dévastatrice de l'eau. La seconde moitié du dix-neuvième et le vingtième siècle ont été jalonnés de divers cas de ruptures de barrages catastrophiques (*Foster et al.*, 2000). Entre 1970 et 1997, *Fry et al.* (1997) a recensé en France 71 manifestations d'érosion interne dont 23 cas de renard hydraulique et 48 cas de suffusion.

Les sols les plus vulnérables à la suffusion sont les sols à granulométrie étalée. Dans ces milieux, les éléments fins sans cohésion sont transportés en premier et ainsi le sol s'appauvrit en fines et devient plus perméable. Par conséquent, les vitesses de percolation deviennent de plus en plus agressives et entraînent finalement la déstabilisation des particules cohésives. Le processus peut se poursuivre pendant plusieurs années pour laisser place à un sol squelettique. Cette situation donne lieu à un état dans lequel les débits de fuite deviennent

suffisamment importants pour mettre en péril le sol où l'ouvrage en question. Parfois, la structure très appauvrie en fines s'effondrera sur elle-même (Lautrin, 2003).

L'étude expérimentale ou numérique du phénomène de suffusion consiste à déterminer le gradient hydraulique, la vitesse critique à partir desquels la suffusion est initiée, et la loi de transport des particules fines associée au phénomène de suffusion. Pour modéliser l'érosion interne, deux approches principales sont présentées dans la littérature : L'approche granulométrique et l'approche hydraulique. Le principe de l'approche granulométrique est de vérifier si la structure primaire (grosses particules) agit comme un filtre sur la structure secondaire (particules fines). Il s'agit de vérifier si le diamètre des particules fines est plus petit que le diamètre des pores constitués par les particules plus grosses.

Kenny et Lau (1986) proposent une méthode d'évaluation de la stabilité d'un sol pulvérulent à l'érosion, qui dépend de l'allure de la courbe granulométrique. Cette méthode consiste à comparer le pourcentage des particules de diamètre compris entre d et $4d$ en fonction du pourcentage de particules inférieures à un diamètre d .

Skempton et Brogan (1994) ont validé expérimentalement les critères de stabilité interne de Kenney et de Lau (1986) et également celui de Kezdi (1979). Ils ont constaté que pour un sol instable, le gradient hydraulique critique pourrait être approximativement 1/3 à 1/5 du gradient de bouillonnance défini par Terzaghi (1939).

Dans l'approche hydraulique, les essais de l'initiation et de développement de l'érosion interne sont effectués soit à débit constant, soit à gradient hydraulique constant. Pour un barrage en terre, les essais à débit constant ne sont pas représentatifs de la réalité car sur site, le gradient hydraulique varie peu (niveau amont quasi-constant). Toutefois dans les essais à débit constant, la perméabilité du milieu diminue légèrement et régulièrement avec le temps. Le colmatage progressif dans le milieu provoque une augmentation de la pression dans les zones où il y a blocage. Lorsque cette pression est suffisamment élevée, des particules de plus en plus importantes sont arrachées et transportées vers des couches avales ou évacuées à l'extérieur de la matrice de sol. Par contre, dans les essais à charge constante, le processus d'érosion est accompagné d'une chute de perméabilité plus importante, indiquant la formation de zones de blocage et de colmatage dans le milieu. Pour un même débit d'écoulement initial, la perméabilité du milieu sollicité hydrauliquement à débit constant reste toujours supérieure à celle mesurée dans l'essai à charge constante (Alhaddad et al., 2008).

Bendahmane (2005) a réalisé des essais d'initiation et de développement de l'érosion interne sur des échantillons sablo-argileux. Les essais ont été effectués sous l'action de différents paramètres tels que le gradient hydraulique, la pression de confinement et le pourcentage d'argile. Les mesures effectuées ont marqué l'extrême faiblesse des masses érodées.

Alhaddad et al. (2008) ont présenté une étude expérimentale sur l'initiation et le développement de l'érosion interne d'un milieu poreux soumis à un écoulement. L'étude a été réalisée sur des colonnes à parois rigides. Les matériaux testés sont constitués soit d'un mélange sable-fines ou de billes de verre-fines. Les résultats obtenus indiquent que les processus d'arrachement et de migration des particules fines dépendent fortement des conditions hydrauliques imposées et de la forme des grains qui constituent la matrice granulaire.

Au cours de l'érosion, la viscosité du mélange fluide et solide évolue d'une façon complexe en fonction de la concentration en particules solides. *Coussot et Ancey* (1999) ont présenté une analyse des différents modèles de viscosité exprimés en fonction de paramètres liés à la phase solide (taille de grain, forme, concentration, étendue granulaire, configuration spatiale des particules dans le fluide,...) et aussi de paramètres liés au fluide saturant (viscosité généralement newtonienne). Ces lois sont de la forme $\mu = \mu_0 f(W)$, parmi lesquelles on cite la formule d'*Einstein* (1906), appliquée au cas de la suspension très diluée.

Il ressort de l'analyse bibliographique que peu de modèles numériques, permettant de décrire l'initiation et le développement de l'érosion interne dans les milieux poreux, sont disponibles. D'où la nécessité de la présente étude, dont l'objectif principal est de modéliser l'initiation et le développement de la suffusion.

MODELE MATHEMATIQUE DE LA SUFFUSION

Pour des raisons de simplification, on s'intéresse dans cette première approche de modélisation seulement à la modélisation monodimensionnelle de la migration des particules fines. On utilise ainsi une loi macroscopique reliant pression, vitesse et force extérieure à l'échelle du volume élémentaire représentatif. Il s'agit d'une loi expérimentale (loi de *Darcy*, 1856, en milieu poreux, Figure 1). Celle-ci est couplée à une loi d'érosion et une loi de comportement rhéologique.

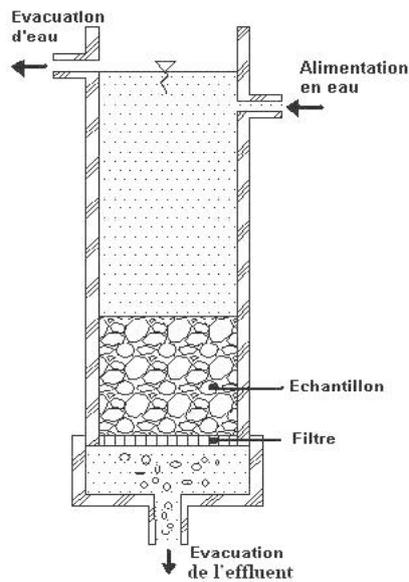


Figure 1: Schéma d'un montage expérimental (Bendahmane, 2005)

Hypothèses et variables du modèle

L'échantillon initial supposé isotrope est représenté comme un volume élémentaire représentatif (VER) composé de deux phases distinctes et continues : La phase solide et le fluide (Figure 2). Les volumes V_s et V_f représentent respectivement le volume de solide et le volume d'eau.

Avec l'initiation de l'érosion, le VER se transforme en trois phases:

- Les particules solides de volume V_s
- Le fluide f de volume V_f
- Le solide fluidisé de volume V_{sf} (Figure 2).

La vitesse et la masse volumique des grains de la matière solide non érodée étant supposées constantes.

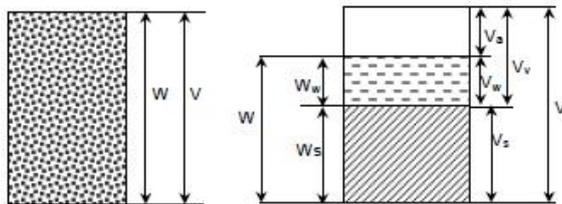


Figure 2: Sol à l'état naturel (gauche) et modèle de sol triphasique (droite)
(Das, 1979)

Lois de comportement

Loi d'écoulement de *Darcy*

$$q = ki \quad (1)$$

$i = \text{constant}$. Dans notre cas il s'agit d'un essai à gradient hydraulique constant.

Loi d'érosion de *Papamichos* (2001)

Il s'agit d'une loi simple bien adaptée au phénomène de suffusion du moment qu'elle est applicable pour un régime laminaire (vitesse de filtration).

$$j = \left\} \dots_s (1 - w)q \quad (2)$$

Loi de comportement rhéologique : Loi d'*Einstein*

$$\sim = \sim_0 (1 + FC) \quad (3)$$

Avec $F = 2,5$: pour les sphères dures, $F > 2,5$ pour les ellipsoïdes allongés ou aplatis, $F < 2,5$ pour les gouttelettes liquides. Pour notre cas on choisit $F = 2,5$ d'où :

$$\sim = \sim_0 (1 + 2,5C) \quad (4)$$

La masse érodée est calculée par :

$$m = \dots_s \int_0^t C.q.dt$$

RESOLUTION NUMERIQUE

A partir des équations précédentes des lois d'écoulement, d'érosion et de comportement rhéologique, on a obtenu un système de deux équations différentielles à deux inconnues (la porosité w et la concentration C des particules dans le fluide).

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \} _p (1-W) q \\ \frac{\partial}{\partial t} [W(1-C)] = q \frac{\partial C}{\partial x} \end{cases}$$

Avec:

$$q = k_0 \left[\frac{(\dots_s / \dots_f - 1) C + 1}{(1 + 2,5C)} \right] \frac{(1-W_0)^2}{W_0^3} \frac{W^3}{(1-W)^2} i$$

La résolution numérique du problème est réalisée par la méthode des différences finies. L'échantillon étudié est discrétisé en un ensemble de couches élémentaires. La couche élémentaire est référencée par l'indice j et l'instant par l'exposant i.

On a deux conditions initiales : Initialement, la porosité est égale à la porosité initiale : $W(0, x) = W_0$

Initialement, la concentration de solide du fluide sur toute la hauteur de l'échantillon est nulle (le fluide étant de l'eau claire) : $C(0, x) = 0$

Les conditions aux limites sont : En tête d'échantillon, pas de solide fixe ni solide fluidisé dans le fluide injecté : $W(t, 0) = 1, C(t, 0) = 0$

La concentration du solide dans le fluide à l'exutoire est égale à la concentration de la dernière couche : $C(t; H^+) = C(t; H)$

Pour la discrétisation, on utilisera le schéma explicite décentré:

$$\begin{cases} W_j^{i+1} = W_j^i + \} . \Delta t . q_j^i (1 - W_j^i) \\ C_j^{i+1} = 1 - \frac{W_j^i}{W_j^{i+1}} (1 - C_j^i) - \frac{\Delta t . q_j^i}{\Delta x . W_j^{i+1}} (C_j^i - C_{j-1}^i) \\ q_j^i = k_0 \left[\frac{(\dots_s / \dots_f - 1) . C_j^i + 1}{(1 + 2,5 . C_j^i)} \right] \frac{(1 - W_j^0)^2}{W_j^0^3} \frac{W_j^i}{(1 - W_j^i)^2} . i \end{cases}$$

METHODE ET EXPERIENCE

Le modèle développé est expérimenté numériquement pour la simulation du phénomène de la suffusion. La base expérimentale prise en considération pour valider le modèle, correspond aux résultats obtenus par les essais de *Bendahmane* (2005). Ces résultats permettent notamment la validité du modèle développé.

Les caractéristiques de l'échantillon utilisé par *Bendahmane* (2005) au cours des essais expérimentaux sont données dans le tableau suivant:

Pourcentage d'argile	Confinement	gradient hydraulique	Géométrie de l'échantillon		Perméabilité initiale k_0	Porosité initiale w_0	Porosité maximale w_{max}
			Hauteur	Section			
10%	200 kPa	20 m/m	0,03 m	50 mm ²	3.10^{-4} m/s	0,33	0,33002

Ces valeurs sont prises en considération pour valider le modèle numérique par les essais expérimentaux de *Bendahmane* (2005).

Il est à noter que le coefficient λ , utilisé dans la loi d'érosion est fixé à $10^{-3}m^{-1}$, conformément à la valeur présentée par *Papamichos et al.* (2001).

RESULTATS

Effet de la variation des paramètres du modèle

Effet de la variation du coefficient d'érosion

La figure 3 montre que pour les valeurs de λ inférieures à $0,0003 m^{-1}$, on obtient une concentration nulle (Courbe d'évolution instantanée de la concentration pour $\lambda = 0,0002 m^{-1}$), et par la suite il n'y a pas de variation de porosité. Cela s'explique par le fait que $\lambda = 0,0003 m^{-1}$ est une valeur critique correspondante à la contrainte critique d'érosion propre à chaque sol, au dessous de laquelle il n'y a pas d'érosion. On constate une bonne convergence de la concentration et de la masse érodée finale, pour des valeurs de λ comprises entre $3.10^{-4} m^{-1}$ et $10^{-1} m^{-1}$. On remarque que le coefficient d'érosion n'a pas d'influence significative sur la masse érodée cumulée, sauf sur la durée pour atteindre la masse érodée finale qui est constante pour n'importe quelle valeur de λ (Figure 4). Toutefois, on note que lorsque le coefficient d'érosion, dépasse la valeur $10^{-1} m^{-1}$, les courbes d'évolution instantanée de la concentration deviennent confondues (cf. figure 4 : Pour $\lambda = 10^{-1} m^{-1}$ et $\lambda = 1m^{-1}$). Donc, au-delà d'une valeur $10^{-1} m^{-1}$, le coefficient d'érosion n'a plus d'influence sur l'évolution de la concentration du solide fluidisé et par conséquent sur la masse érodée (Figure 4). Cela peut être expliqué par le fait que le modèle établi est bien adapté au phénomène de la suffusion qu'est un phénomène relativement lent. C'est-à-dire qu'il apparaît sous une condition de cinétique d'érosion plus modérée que celle du phénomène de renard par

exemple. Celui-ci est plus rapide, et il est décrit par des lois catégoriquement différentes de celle de la suffusion.

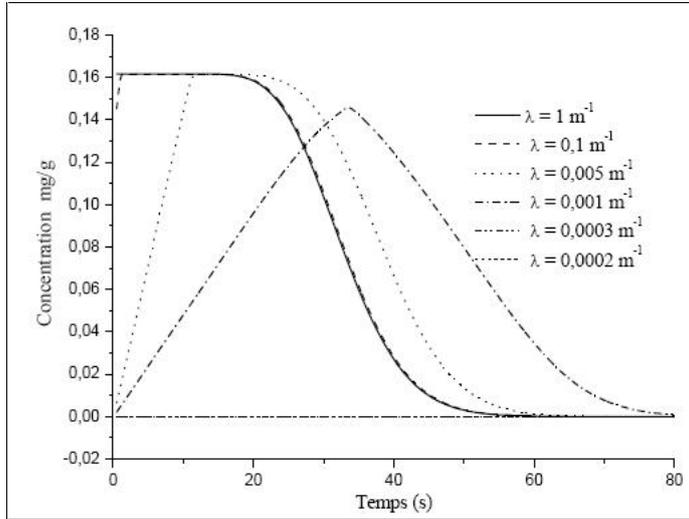


Figure 3: Évolution de la concentration pour différentes valeurs de λ

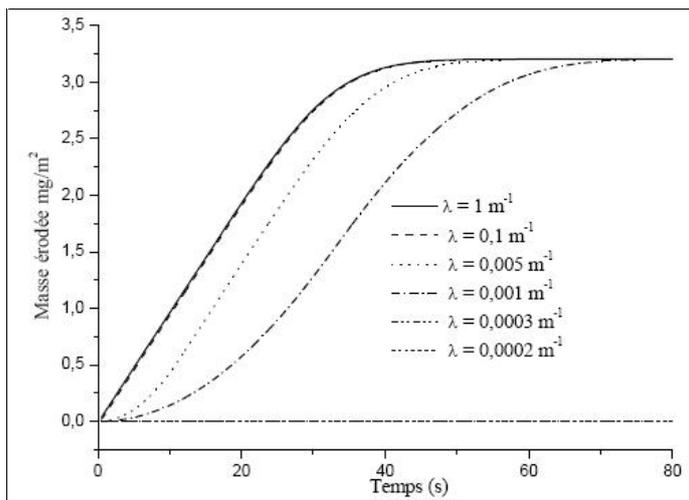


Figure 4: Évolution de la masse érodée pour différentes valeurs de λ

Effet de la variation de la porosité maximale W_{max}

L'influence de la variation de la porosité maximale W_{max} , c'est à dire la porosité finale, sur la convergence du modèle est traitée à travers la variation instantanée de la porosité, de la concentration et de la masse cumulée du solide érodée.

D'après Bendahmane (2005), la porosité maximale (finale) peut être déterminée expérimentalement en fonction de la masse érodée finale, tout en supposant la constance du volume de l'échantillon. On a jugé utile d'étudier l'influence de la variation de cette porosité maximale n_{max} , sur l'évolution instantanée de la concentration en solide fluidisé, et sur la masse cumulée du solide érodé.

Les figures 5 et 6 représentent respectivement l'évolution instantanée de la concentration et de la masse cumulée du solide érodé pour différentes valeurs de W_{max} . Sachant que la porosité initiale de l'échantillon est $W_0 = 0,33000$, on applique dans notre modèle de légères variations du critère d'arrêt numérique de la porosité maximale W_{max} , de l'ordre de 10^{-5} . On se limite à l'intervalle $W_{max} = [0,33001; 0,33005]$. On constate une importante variation de la concentration du solide fluidisé (Figure 5) ainsi que sur la masse érodée finale (Figure 6), de telle sorte qu'une variation de la porosité de l'ordre de 10^{-5} provoque une variation presque doublée de la masse érodée finale. Donc plus le milieu est poreux plus il est érodible.

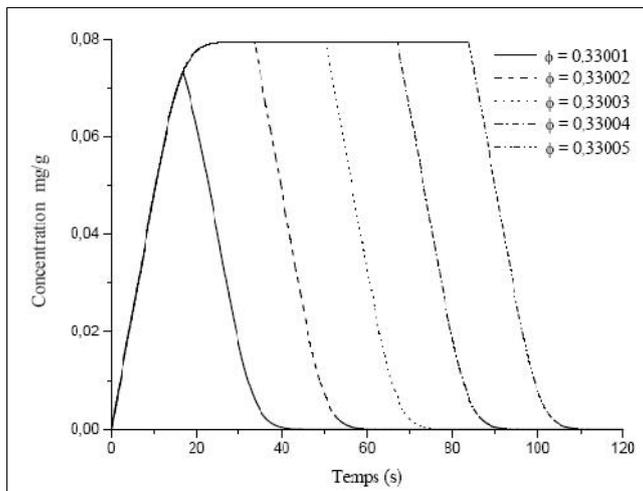


Figure 5: Évolution de la concentration pour différentes valeurs de W_{max}

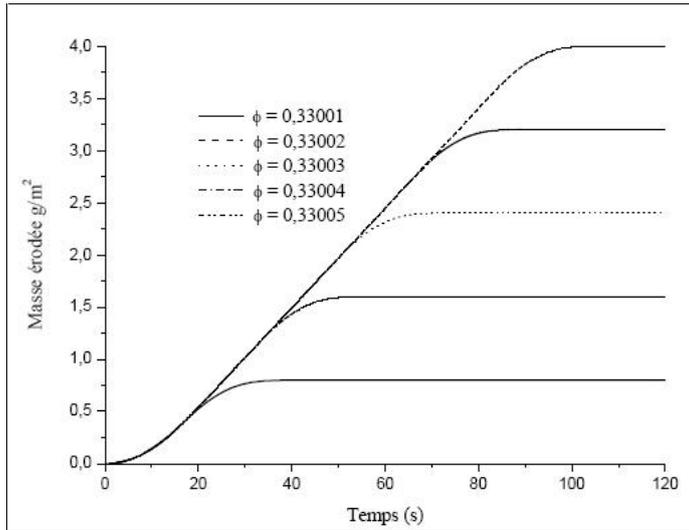


Figure 6: Évolution de la masse érodée pour différentes valeurs de W_{\max}

Validation expérimentale

Les figures 7 et 8 permettent de comparer les résultats de notre modèle numérique avec les résultats expérimentaux de l'étude paramétrique de *Bendahmane* (2005). Ces figures montrent une assez bonne convergence entre les résultats expérimentaux et le modèle numérique de l'évolution instantanée de la concentration du fluide en particules érodées ainsi que la masse de celles-ci.

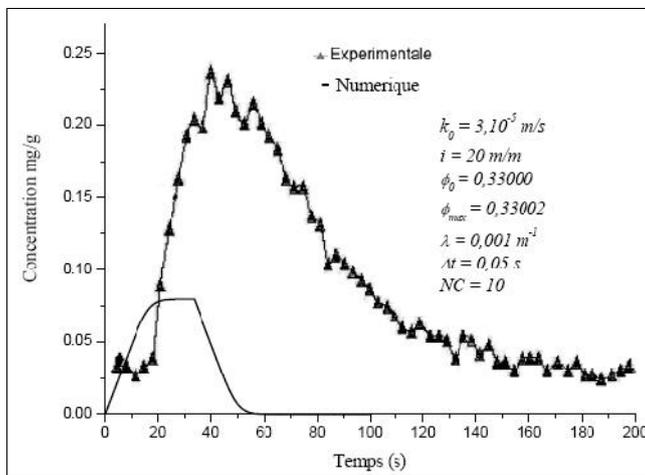


Figure 7: Comparaison entre le modèle numérique et les résultats expérimentaux de la concentration en particules érodées.

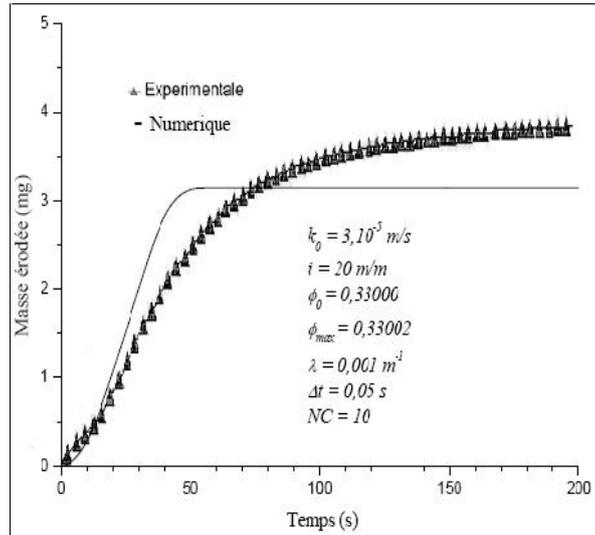


Figure 8: Comparaison entre le modèle numérique et les résultats expérimentaux de la masse érodée.

- Pour la concentration : Numériquement, on constate un accroissement jusqu'à une valeur maximale de l'ordre de 0,10 mg/g à environ 40 s puis une diminution plus rapide jusqu'à ce qu'elle s'annule. Expérimentalement, on constate également un accroissement jusqu'à une valeur maximale, mais nettement supérieure, de l'ordre de 0,25 mg/g, puis une diminution plus lente jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur minimale de l'ordre de 0,03 mg/g équivalente à la valeur initiale qui pourrait représenter la teneur de l'eau en particules solides avant la filtration.
- Pour la masse érodée cumulée: On constate un accroissement jusqu'à une valeur asymptotique de l'ordre de 3,5 mg qui est une valeur proche à celle obtenue expérimentalement.

Cependant, le décalage observé entre le modèle numérique et expérimental concernant la valeur maximale de la concentration ainsi que sa décroissance rapide/lente dans le modèle numérique/expérimental s'explique par le fait que réellement le phénomène de suffusion est accompagné de chute de perméabilité due au phénomène de dépôt qui à son tour contribue au colmatage des pores. Suivant ce mécanisme, une partie des fines érodées de la partie supérieure de l'échantillon, pourrait subir un dépôt dans la partie inférieure de l'échantillon (Figure 1). Par la suite, elle contribue au colmatage des pores principaux de cette partie de l'échantillon. Ce colmatage modifie très fortement la perméabilité locale et par conséquent la perméabilité globale. Il ne reste qu'une partie des fines qui contribuerait à l'augmentation de la masse érodée en sortant de l'échantillon, ce qui est justifié expérimentalement.

Ceci montre que cette première version du code nécessite plus d'évolution, du moment qu'il ne tient pas compte du phénomène de dépôt partiel des particules érodées.

Cette évolution complexe du phénomène de suffusion pourrait être modélisée par trois lois de comportement: Érosion + Transport + Dépôts. Les deux premières ayant été traitées dans cette étude de manière jugée satisfaisante. Le dépôt serait à intégrer par exemple en utilisant un critère de concentration en particules érodées, au dessus duquel il y aura dépôt.

L'établissement de cette loi de dépôt/colmatage, pourrait être envisagée par la réalisation d'essais à débit d'injection (d'écoulement) constant et non plus à gradient hydraulique constant comme c'était le cas dans cette étude, quoique ce type d'essai est moins représentatif des conditions réelles d'un barrage. Néanmoins, il permet dans le code de simplifier le couplage des effets de migration interne sur la perméabilité.

Nous avons présenté une première approche de modélisation du phénomène de suffusion basée sur une approche macroscopique. Ce modèle est résolu numériquement en différences finies 1D. L'étude de convergence du modèle développé a permis de définir les paramètres de discrétisation temporelle et spatiale. L'influence de la variation des paramètres physiques employés (α , W_{\max}) est jugée par rapport à un essai expérimental de référence.

Les ordres de grandeurs et les allures de l'évolution simulée de la concentration et de masse érodée s'ajustent avec les résultats expérimentaux, bien que le modèle ne soit qu'une version de base, prenant en considération seulement l'érosion et le transport.

La prise en considération et l'interprétation des écarts entre le modèle numérique et le modèle expérimental, qui persistent notamment sur la concentration en particules érodées, nous orientent vers des perspectives d'évolution du code :

- Intégration d'une loi de dépôt couplée aux lois de transport et d'érosion.
- Amélioration voire suppression du critère d'arrêt de la porosité à la porosité maximale W_{\max} qui n'est pas intrinsèque jusqu'ici. En effet les lois de comportement doivent elles mêmes le prendre en considération.
- Reformulation du bilan de conservation permettant une variation volumique locale et globale de l'échantillon susceptible de réduire la porosité connectée.

CONCLUSION

Nous avons donc tenté de concevoir un modèle numérique pour le phénomène de suffusion, en tenant compte de la variation des différents paramètres hydrauliques et mécaniques. Quoiqu'établis par des hypothèses simplificatrices, ce modèle permet de tester rapidement la vulnérabilité des ouvrages hydrauliques face aux phénomènes d'érosion interne par la suffusion. Ce modèle tient en considération les différents paramètres hydrauliques et mécaniques et montrent l'influence de chacun d'eux sur le processus d'érosion interne. L'influence des paramètres hydrauliques et mécanique d'un sol donné sur l'érosion par suffusion a été jugée par rapport à un essai expérimental de référence. Les ordres de grandeurs et les allures de l'évolution instantanée de la porosité, de la concentration et de la masse érodée cumulée des particules érodées sont cohérentes avec les résultats expérimentaux, bien que le modèle ne soit qu'une version de base, ne prenant en considération que l'érosion et le transport. Toutefois, le développement du code est nécessaire pour mieux prendre en considération les écarts entre le modèle numérique établi et le modèle physique, en tenant compte des :

- Phénomènes de sédimentation et de dépôt
- Variation volumique locale et globale de l'échantillon susceptible de réduire la porosité.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALHADDAD S., ALEM A., WANG H., BENAMAR A., AHFIR N. (2008). Effet des conditions hydrauliques et de la forme des grains sur l'érosion interne dans un milieu poreux. Technical report, Laboratoire Ondes et Milieu Complexes, FRE 3102 CNRS, Université du Havre, France.
- BENDAHDANE F. (2005). Influence des interactions mécaniques eau-sol sur l'érosion interne, Thèse de doctorat, Université de Nantes.
- COUSSOT P., ANCEY C. (1999). Rhéophysique des pâtes et des suspensions, EDP Sciences.
- DARCY H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de Dijon, chapitre annexe D, Paris.
- EINSTEIN A. (1906). Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. Annalen der Physik, 19, 289-306.
- FOSTER M., FELL R., SPANNAGLE M. (2000). The statistics of embankment dam failures and accidents, Canadian Geotechnical Journal, 37, 5, 1000-1024.
- FRY J.J., DEGOUTTE G. (1997). L'érosion interne : typologie, détection et réparation, Barrages & réservoirs, n°6, 26p.

- KENNEY, T.C., LAU, D. (1986). Internal stability of granular filters: Reply. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 23, 420-423.
- KEZDI A. (1979). Soil physics – selected topics, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 160p.
- LAUTRIN D. (2003). Technology & Engineering, 239p.
- PAPAMICHOS, E. I. et al. (2001). Volumetric sand production model and experiment. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 25, 780-808.
- SKEMPTON A.W., BROGAN J.M. (1994). Experiments on piping in sandy gravels, Geotechnique, Vol. 44, n°3, 449-460.
- TERZAGHI K. (1939). Soil mechanics: a new chapter in engineering science. J. Instn. Civ. Engrs, 12, 106-141.